非线性发展方程的调和分析方法
(I) 适定性理论

王保祥 霍朝辉 郝成春 郭紫华著

谨以此书献给养育我们的父母和祖国

目　录

序 言

科学的唯一目的是人类精神的光荣. —— C. G. J. Jacobi

在过去的二十多年里, 非线性发展方程在调和分析技术的推动下取得了较大的发展, 本书将较为系统地介绍非线性发展方程的调和分析方法.

众所周知, 解发展方程需要我们选取适当的函数空间为工作空间. 当今采用大部分函数空间都是建立在Lebesgue积分[1] 这一基石之上的. 但意味深长的是, Lebesgue积分在很长的岁月里甚至不为法国数学界所承认. Lebesgue的回忆充满了苦涩：只要他试图参加一个数学讨论, 总会有分析学家说："这里不会使你感兴趣, 我们在讨论有导数的函数."或者有几何学家说:"我们在讨论有切平面的曲面."不难想象, 年轻的Lebesgue内心是何等受伤, 新的数学思想的成长往往就是这样的不易. 数学带给了数学工作者太多的悲喜, 这是难于用语言来表达的.

但是, 作者相信, 在过去的二十多年里, 非线性发展方程的许多重要进展带给了我们很多的喜悦, 至少, 从局部历史来看是这样. 作者试图将这些重要的进展较为系统地记录在本书内, 和这一方向的同仁、特别是有志于从事这一方向的年轻人一同分享这些成就.

调和分析方法应用到非线性发展方程起源于上个世纪70年代末R. S. Strichartz等人关于线性波方程解的时间－空间估计, 随后这些时空估计结合半群理论开始成为研究非线性发展方程强有力的方法. 进入上个世纪90年代, 调和分析的很多重要思想和技术, 如二进制分解技术、乘子理论、振荡积分理论、Besov空间等开始应用到非线性发展方程, 非线性发展方程的理论得到很大推进和丰富. 另一方面, 非线性发展方程的研究也推动了调和分析的发展, 一些新的函数空间框架、新的算子类被人们在研究非线性发展方程时所发现. 有我国大理学家朱熹的一首诗为证：

观书有感

——朱熹

半亩方塘一鉴开, 天光云影共徘徊.
问渠哪得清如许, 为有源头活水来.

举其大者, 就有J. Bourgain, S. Klainerman 和M. Machedon 于1993 年将$X^{s,b}$空间应用到色散波方程的研究, $X^{s,b}$ 的优势是能够很好地处理非线性项中的

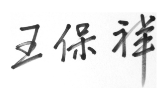
[1]Henri Lebesgue, 1875-1941, 法国数学家, 1902年发表《积分、长度与面积》一文, 标志着Lebesgue积分的创立.

导数; 1999年Bourgain 发现“局部能量分离方法”, 用于研究散射算子的存在性; “I-乘子方法” 被T. Tao 的研究小组发现, 可以有效地解决具有低正则性初值的色散波方程的整体适定性; C. E. Kenig 和F. Merle 等人将椭圆方程的集中紧性方法发展到了聚焦情形的色散波方程. 最近频率一致分解技术也在发展方程理论得到系列应用. 作者们相信, 未来会有更深入的调和分析理论用到偏微分方程的研究.

具体说来, 本书要详细介绍一类非线性色散(dispersive)波方程如非线性Schrödinger 方程、非线性Klein-Gordon方程、KdV方程, 非线性抛物型方程如Navier-Stokes方程, Boltzmann 方程等一类重要发展方程的调和分析方法. 介绍这类方程的解的整体适定性. 对色散波方程, 还要介绍它们的散射算子的存在性内容. 本书第1、2、3、4、6章是由第一作者完成的, 第5章是由霍朝辉和郭紫华写的, 第一作者修改的, 第7章是由郝成春完成的, 第8章是由霍朝辉写的. 其中第2、3、4、5、6章很多结果都是作者们根据前沿文献给出了新的证明或简化.

本书需要张恭庆、林源渠所著的《泛函分析》(上册)为基础, 特别需要读者熟悉广义函数、Fourier变换的有关基本内容, 除此之外, 不需要读者熟悉很多调和分析内容.

本书主要内容第一作者在北京大学讲过多遍. 本书的部分内容第一作者曾在香港中文大学, 浙江大学讲述过, 作者感谢辛周平教授, 陈杰诚教授的宝贵意见. 作者们很高兴能借此书出版的机会向导师周毓麟、孙和生、郭柏灵、肖玲和彭立中诸位先生表示衷心感谢; 第一作者也要特别感谢张恭庆、丁伟岳和田刚诸位先生所给予的各方面的帮助, 同时借本书出版的机会, 深切怀念入门导师王廷辅先生.



2010年5月于北京大学

第一章　Fourier乘子、函数空间$X^s_{p,q}$

对自然界的深入研究是数学发现的最丰富的源泉. —— J. Fourier[1]

本章我们将简要介绍调和分析的一些必要内容. 我们需要读者熟悉Fourier变换、Schwartz空间、缓和分布空间的基本内容, 这些内容可以在许多标准教科书中找到, 我们将这些结果列在第一节, 证明可见[182]. 本章后面几节是本书用到的调和分析的一些基本内容, 将介绍Fourier乘子、Besov空间$B^s_{p,q}$、Triebel-Lizorkin空间 $F^s_{p,q}$、嵌入等理论, 大部分结果都给出了完整的证明. 若想了解更多这些内容, 可见[11, 157]. 本书采用了一些PDE领域通用的记号, 正文不再交待, 可见附录一. 我们想提醒读者, Triebei 空间, Bessel 空间 H^s_p ($H^s = H^s_2$) 和通常 Sobolev 空间之间有下面的关系:

$$F^s_{p,2} = H^s_p,\quad H^m_p = W^m_p,\quad F^s_{2,2} = H^s,\quad \forall\ s \in \mathbb{R},\ m \in \mathbb{Z}_+,\ 1 < p < \infty.$$

§1.1　Schwartz函数、缓增分布、Fourier变换

设$\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$表示多重指标,

$$D^\alpha = \partial^{\alpha_1}_{x_1} ... \partial^{\alpha_n}_{x_n},\quad \partial^{\alpha_i}_{x_i} = \partial^{\alpha_i}/\partial x_i^{\alpha_i},\quad |\alpha| = \alpha_1 + ... + \alpha_n,\quad x^\alpha = x_1^{\alpha_1} ... x_n^{\alpha_n}.$$

我们用$C^\infty(\mathbb{R}^n)$ 表示定义在n 维欧氏空间$\mathbb{R}^n$上的无穷次可微函数. 引入下面的函数类:

$$\begin{aligned} &\mathscr{S} = \{\phi \in C^\infty(\mathbb{R}^n):\ p_k(\phi) < \infty\},\\ &p_k(\phi) = \sup_{x\in\mathbb{R}^n} (1 + |x|^2)^{k/2} \sum_{|\alpha|\leqslant k} |D^\alpha \phi(x)|. \end{aligned} \tag{1.1.1}$$

容易验证$p_k(\cdot)$ 为$\mathscr{S}$上的范数, 从而也是半范数, 由线性拓扑空间的一般理论, $\mathscr{S}$按照半范数族$\{p_k\}_{k=0}^\infty$生成局部凸的拓扑线性空间, 被称为Schwartz空间, 此空间中的函数被称为Schwartz函数, $\mathscr{S}$的基本零邻域系为

$$B_{k,\varepsilon} = \{\phi \in \mathscr{S}:\ p_k(\phi) < \varepsilon\},\ \ k \in \mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, ...\},\ \varepsilon > 0.$$

我们用$\mathscr{S}' := \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$表示$\mathscr{S}$上连续泛函的全体, 其上赋强拓扑, 在强拓扑意义下, $\mathscr{S}'$ =也是局部凸拓扑空间, 被称为是缓增分布空间. 其上的基本零邻域为

$$U_{B,\varepsilon} = \left\{ f \in \mathscr{S}:\ \sup_{\phi\in B} |f(\phi)| < \varepsilon \right\},$$

[1] Joseph Fourier (1768–1830), 法国数学家, 法国分析学派公认的代表.

其中B为$\mathscr{S}$中有界集, 用$f(\phi)$表示泛函f作用在ϕ的值. 对$\phi,\psi\in\mathscr{S}$, 引入Fourier(逆)变换

$$\widehat{\phi}(\xi)=(\mathscr{F}\phi)(\xi)=(2\pi)^{-n/2}\int_{\mathbb{R}^n}e^{-\mathrm{i}x\cdot\xi}\phi(x)dx,$$
$$\check{\psi}(x)=(\mathscr{F}^{-1}\psi)(x)=(2\pi)^{-n/2}\int_{\mathbb{R}^n}e^{\mathrm{i}x\cdot\xi}\psi(\xi)d\xi. \tag{1.1.2}$$

其中$x\cdot\xi=x_1\xi_1+\ldots+x_n\xi_n$ (很多时候我们干脆记$x\cdot\xi=x\xi$). 空间$\mathscr{S}$在Fourier分析中扮演着重要的角色, $\mathscr{S}$和Fourier变换之间十分和谐, 这大致上可以从下面的命题看出.

命题1.1.1. 设$\phi\in\mathscr{S}$. 则

$$\widehat{D^\alpha\phi}(\xi)=\mathrm{i}^{|\alpha|}\xi^\alpha\widehat{\phi}(\xi),\quad D^\alpha\widehat{\phi}(\xi)=(-\mathrm{i})^{|\alpha|}\widehat{x^\alpha\phi}(\xi),$$
$$\mathscr{F}^{-1}(\mathscr{F}\phi)=\phi.$$

进一步, $\mathscr{F}$ ($\mathscr{F}^{-1}$): $\mathscr{S}\to\mathscr{S}$ 为一一映上的连续映射, 即同胚映射.

命题1.1.2. 设$\phi,\psi\in\mathscr{S}$. 则

$$\int_{\mathbb{R}^n}\phi(x)\widehat{\psi}(x)dx=\int_{\mathbb{R}^n}\widehat{\phi}(x)\psi(x)dx.$$

可以定义$\mathscr{S}$上的卷积$\phi*\psi$ 如下:

$$\phi*\psi(x)=\int_{\mathbb{R}^n}\phi(x-y)\psi(y)dy.$$

命题1.1.3. 设$\phi,\psi\in\mathscr{S}$. 则

$$\widehat{\phi*\psi}=(2\pi)^{n/2}\widehat{\phi}\cdot\widehat{\psi},\quad \widehat{\phi\cdot\psi}=(2\pi)^{-n/2}\widehat{\phi}*\widehat{\psi}.$$

用σ_λ和τ_h分别表示膨胀(dilation)和平移算子:

$$\sigma_\lambda\phi=\phi(\lambda\cdot),\quad \lambda\in\mathbb{R}\setminus\{0\},$$
$$\tau_h\phi=\phi(\cdot-h),\ \ h\in\mathbb{R}^n.$$

命题1.1.4. 设$\phi\in\mathscr{S}$, $\lambda\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$, $h\in\mathbb{R}^n$. 则

$$\widehat{\tau_h\phi}=e^{-ih\xi}\widehat{\phi},$$
$$\widehat{e^{ihx}\phi}=\tau_h\widehat{\phi},$$
$$\widehat{\sigma_\lambda\phi}=|\lambda|^{-n}(\sigma_{1/\lambda}\widehat{\phi}).$$

上述命题除去证明$\mathscr{F}^{-1}\widehat{\phi}=\phi$需用到一些特殊技巧, 如

$$\widehat{e^{-|x|^2/2}}=e^{-|\xi|^2/2}$$

外, 其余证明皆可以从基本概念入手证得, 读者可以自行完成. 下面转入讨论$f\in\mathscr{S}'$的Fourier变换, 受命题1.1.2的启发, 定义$\widehat{f}$如下

$$(\mathscr{F}f)(\phi)=\widehat{f}(\phi)=f(\widehat{\phi}),\quad \phi\in\mathscr{S},$$
$$(\mathscr{F}^{-1}f)(\phi)=\check{f}(\phi)=f(\check{\phi}),\quad \phi\in\mathscr{S}.$$

命题1.1.5. $\mathscr{F}:\mathscr{S}'\to\mathscr{S}'$为同胚.

我们还可以定义$f\in\mathscr{S}'$与$\phi\in\mathscr{S}$的卷积. 回忆若$f,\phi,\psi\in\mathscr{S}$, 则

$$\int_{\mathbb{R}^n}(f*\phi)(x)\psi(x)dx=\int_{\mathbb{R}^n}f(x)(\tilde{\phi}*\psi)(x)dx,$$

其中$\tilde{\phi}=\phi(-\cdot)$. 按这种想法, 定义:

$$(f*\phi)(\psi)=f(\tilde{\phi}*\psi),\quad f\in\mathscr{S}',\ \phi,\psi\in\mathscr{S}.$$

注意到缓增分布的Fourier变换和缓增分布与Schwartz函数卷积的定义, 我们就很容易推广其他算子的定义了, 基本的想法是, 先考察两个Schwartz函数作用的情况(这种情形均可以用积分表示出来), 然后抽象出算子作用的形式, 即可推广到$\mathscr{S}'$上来. 设$f\in\mathscr{S}'$, 定义 :

$$D^\alpha f(\phi):=f((-D)^\alpha\phi),$$
$$\tau_h f(\phi):=f(\tau_{-h}\phi),\quad h\in\mathbb{R}^n,$$
$$\sigma_\lambda f(\phi):=f(\lambda^{-n}\sigma_{1/\lambda}\phi),\quad \lambda>0.$$

众所周知, $f\in\mathscr{S}'$并不代表f有具体的函数表示, 因此下面的结果格外重要

命题1.1.6. 设$f\in\mathscr{S}'$, $\phi\in\mathscr{S}$. 则$f*\phi$为一个无穷次可微函数,

$$(f*\phi)(x)=f(\tau_x\tilde{\phi})$$

且$f*\phi$至多为多项式增长, 即对任何$\alpha\in\mathbb{Z}_+^n$存在多项式P_α, 使得$|D^\alpha(f*\phi)(x)|\leqslant P_\alpha(x)$, $x\in\mathbb{R}^n$.

命题1.1.7. (Paley-Wiener-Schwartz) (1) $\phi \in \mathscr{S}$且$\operatorname{supp}\widehat{\phi} \subset \{\xi : |\xi| \leqslant b\}$的充要条件是：$\phi(z)(z = x + iy)$是一个$n$复变量全纯解析函数且对任何$\varepsilon > 0$, $\lambda > 0$, 存在$C_{\varepsilon,\lambda} > 0$, 使得

$$|\phi(z)| \leqslant C_{\varepsilon,\lambda}(1 + |x|)^{-\lambda} e^{(b+\varepsilon)|y|}, \quad x, y \in \mathbb{R}^n.$$

(2) $f \in \mathscr{S}'$且$\operatorname{supp}\widehat{f} \subset \{\xi : |\xi| \leqslant b\}$的充要条件是：$f(z)(z = x + iy)$是一个$n$复变量全纯解析函数, 且对某个$\lambda \in \mathbb{R}$, 对任何$\varepsilon > 0$ 存在$C_\varepsilon > 0$ 使得

$$|f(z)| \leqslant C_{\varepsilon,\lambda}(1 + |x|)^{\lambda} e^{(b+\varepsilon)|y|}, \quad x, y \in \mathbb{R}^n.$$

§1.2　L^p 上的Fourier乘子

我们用$L^p := L^p(\mathbb{R}^n)$表示Lebesgue空间, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, L^p上范数简记为$\|\cdot\|_p$. 我们在研究发展方程时, 通常需要考虑半群的估计. 比如, 考虑下面的热方程

$$u_t - \triangle u = 0, \quad u|_{t=0} = u_0, \tag{1.2.1}$$

容易推出$u = \mathscr{F}^{-1} e^{-t|\xi|^2} \mathscr{F} u_0 := H(t)u_0$ 是(1.2.1)的解. 我们关心下面的问题：$H(t)$是$L^p \to L^p$的有界线性半群吗？即下面的不等式是否成立？

$$\|\mathscr{F}^{-1} e^{-t|\xi|^2} \mathscr{F} u_0\|_p \lesssim \|u_0\|_p, \quad 1 \leqslant p \leqslant \infty. \tag{1.2.2}$$

上述问题的回答是肯定的, 详见第四章. 我们把(1.2.2)归纳成下面的概念：

定义1.2.1. 设$\rho \in \mathscr{S}'$. 若存在常数$C > 0$使得[2]

$$\|\mathscr{F}^{-1}\rho\mathscr{F} f\|_p \leqslant C\|f\|_p, \quad \forall\, f \in \mathscr{S}, \tag{1.2.3}$$

则我们称ρ为L^p上的乘子. L^p上的乘子的全体记为M_p, 乘子范数定义为

$$\|\rho\|_{M_p} = \sup\{\|\mathscr{F}^{-1}\rho\mathscr{F} f\|_p : \ f \in \mathscr{S}, \ \|f\|_p = 1\}. \tag{1.2.4}$$

若$\rho \in M_p$ 且$1 \leqslant p < \infty$, 由于$\mathscr{S}$在L^p中稠密, 我们可以将$\mathscr{F}^{-1}\rho\mathscr{F}$唯一保范延拓为$L^p$上的有界线性算子, 延拓后的算子仍记为$\mathscr{F}^{-1}\rho\mathscr{F}$.

乘子是调和分析的基本工具, 各类函数空间的研究也需要用乘子理论作为基础. 下面我们讨论乘子的一些基本性质和乘子的判别法.

[2]注意$\mathscr{F}^{-1}\rho\mathscr{F} f = (\mathscr{F}^{-1}\rho) * f$, 由命题1.1.6, 我们知道这样的$\mathscr{F}^{-1}\rho\mathscr{F} f$ 是函数.

命题1.2.2. 设$1 \leqslant p \leqslant q \leqslant 2$. 则有如下结论

(1) $M_p = M_{p'}, \quad \|\cdot\|_{M_p} = \|\cdot\|_{M_{p'}}$;

(2) $M_p \subset M_q, \quad \|\cdot\|_{M_q} \leqslant \|\cdot\|_{M_p}$;

(3) $M_2 = L^\infty, \quad \|\cdot\|_{M_2} = \|\cdot\|_\infty$;

(4) $M_1 = \{\rho \in \mathscr{S}' : \mathscr{F}^{-1}\rho$为有界测度$\}$, $\|\rho\|_{M_1} = \mathscr{F}^{-1}\rho$的全变差.

证明. 首先证明(1). 设 $\rho \in M_p$. 对任何 $f, g \in \mathscr{S}$, $\|f\|_p = \|g\|_{p'} = 1$, 我们有[3]

$$|(\mathscr{F}^{-1}\rho\mathscr{F}f,\, g)| \leqslant \|\mathscr{F}^{-1}\rho\mathscr{F}f\|_p\|g\|_{p'} \leqslant \|\rho\|_{M_p}, \tag{1.2.5}$$

注意到 $(\mathscr{F}^{-1}\rho\mathscr{F}f,\, g) = (\mathscr{F}^{-1}\rho * f * \widetilde{\overline{g}})(0)$, 其中 $\widetilde{g} = g(-\cdot)$, 我们知道(1.2.5)也蕴含 $\mathscr{F}^{-1}\rho\mathscr{F}g \in L^{p'}$ 且 $\rho \in M_{p'}$, $\|\rho\|_{M_{p'}} \leqslant \|\rho\|_{M_p}$. 从而证明了(1).

现在证明(2). 由 $1 \leqslant p \leqslant q \leqslant 2$知道$p' \geqslant 2$, 从而可以选到 $\theta \in [0,1]$满足$1/q = (1-\theta)/p + \theta/p'$. 若 $\rho \in M_p$, 由(1)知道 $\rho \in M_{p'}$. 即

$$\mathscr{F}^{-1}\rho\mathscr{F} :\ L^p \to L^p; \quad \mathscr{F}^{-1}\rho\mathscr{F} :\ L^{p'} \to L^{p'} \tag{1.2.6}$$

均为有界线性算子. 由 Riesz-Thorin 插值定理（见附录）得到 $\mathscr{F}^{-1}\rho\mathscr{F} : L^q \to L^q$ 也为有界线性算子, 且

$$\|\rho\|_{M_q} \leqslant \|\rho\|_{M_p}^{1-\theta}\|\rho\|_{M_{p'}}^{\theta} = \|\rho\|_{M_p}. \tag{1.2.7}$$

考虑(3)的证明. 若 $\rho \in M_2$, 则由Plancherel定理,

$$\|\mathscr{F}^{-1}\rho\mathscr{F}f\|_2 = \|\rho\mathscr{F}f\|_2 \leqslant \|\rho\|_\infty\|f\|_2, \tag{1.2.8}$$

所以 $\|\rho\|_{M_2} \leqslant \|\rho\|_\infty$. 反过来, 对任何 $\varepsilon > 0$, 可取非零测度闭集 $E \subset \mathbb{R}^n$, 使得在 E 上 $|\rho(\xi)| \geqslant \|\rho\|_\infty - \varepsilon$, 取 $f \in L^2$满足$\operatorname{supp}\mathscr{F}f \subset E$即得到 $\|\rho\|_{M_2} \geqslant \|\rho\|_\infty - \varepsilon$.

最后证明(4). 由算子 $\mathscr{F}^{-1}\rho\mathscr{F}$ 的平移性质可以看出 $\rho \in M_\infty$ 当且仅当

$$|(\mathscr{F}^{-1}\rho * f)(0)| = (2\pi)^{n/2}|(\mathscr{F}^{-1}\rho\mathscr{F}f)(0)| \leqslant C\|f\|_\infty, \quad \forall\, f \in \mathscr{S}. \tag{1.2.9}$$

注意 $\mathscr{S}$ 在 $C_0(\mathbb{R}^n)$ 中稠密, 上式表明 $\mathscr{F}^{-1}\rho$ 恰为 $C_0(\mathbb{R}^n)$ 上的连续线性泛函. 由 $C_0(\mathbb{R}^n)^*$ 的构造即得到结论. □

[3]我们用 (f,g) 表示复内积, 即 $(f,\, g) = \int f(x)\overline{g}(x)dx$.

命题1.2.3. M_p为Banach代数.

证明. 显然 $\|\cdot\|_{M_p}$ 为范数. 由命题 1.2.2 的(3), 我们知道, $M_p \subset L^\infty$. 如果 $\{\rho_k\}$ 为 M_p 中的基本点列, 则也为 L^∞ 中的基本点列, 不妨设收敛到 ρ. 由 $L^\infty \subset \mathscr{S}'$, 我们知道, 对任何 $f \in \mathscr{S}$, $\mathscr{F}^{-1}\rho_k\mathscr{F}f \to \mathscr{F}^{-1}\rho\mathscr{F}f$ (按 $\mathscr{S}'$ 的强拓扑). 不要忘记 $\mathscr{F}^{-1}\rho_k\mathscr{F}f$ 是 $L^p \subset \mathscr{S}'$ 中的 Cauchy 列, 所以有极限 g, 再由 $\mathscr{S}'$ 上极限的唯一性便知 $g = \mathscr{F}^{-1}\rho\mathscr{F}f$. 由此可得 $\|\rho_k - \rho\|_{M_p} \to 0$. 所以 M_p 为 Banach 空间. 设 $\rho_1, \rho_2 \in M_p$. 对任何 $f \in \mathscr{S}$, 我们有

$$\|\mathscr{F}^{-1}\rho_1\rho_2\mathscr{F}f\|_p \leqslant \|\rho_1\|_{M_p}\|\mathscr{F}^{-1}\rho_2\mathscr{F}f\|_p \leqslant \|\rho_1\|_{M_p}\|\rho_2\|_{M_p}\|f\|_p, \tag{1.2.10}$$

上式已经说明 $\rho_1\rho_2 \in M_p$ 且

$$\|\rho_1\rho_2\|_{M_p} \leqslant \|\rho_1\|_{M_p}\|\rho_2\|_{M_p}. \tag{1.2.11}$$

所以 M_p 为Banach代数. □

为了突出M_p和$\mathbb{R}^n$的关系, 我们记$M_p = M_p(\mathbb{R}^n)$. 下面的命题表明$M_p(\mathbb{R}^n)$上的乘子在$\mathbb{R}^n$的线性变换之下保持乘子范数不变.

命题1.2.4. 设 $a:\ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ $(n \geqslant m)$ 为满的线性变换, $\rho \in M_p(\mathbb{R}^m)$. 则

$$\|\rho(a(\cdot))\|_{M_p(\mathbb{R}^n)} = \|\rho\|_{M_p(\mathbb{R}^m)}. \tag{1.2.12}$$

特别有

$$\|\rho(c\,\cdot)\|_{M_p(\mathbb{R}^n)} = \|\rho\|_{M_p(\mathbb{R}^n)}, \quad c \neq 0; \tag{1.2.13}$$

$$\|\rho(\langle x,\ \cdot\rangle)\|_{M_p(\mathbb{R}^n)} = \|\rho\|_{M_p(\mathbb{R})}, \quad x \neq 0, \tag{1.2.14}$$

其中 $\langle x,\ \xi\rangle = x_1\xi_1 + \dots + x_n\xi_n$.

证明. 做坐标变换

$$\eta_i = a_i(\xi),\ 1 \leqslant i \leqslant m; \quad \eta_j = \xi_j,\ m+1 \leqslant j \leqslant n. \tag{1.2.15}$$

上述变换简记为 $\eta = A^{-1}\xi$, 或 $\xi = A\eta$. 又用 A_* 表示 A 的转置矩阵, 易见

$$\mathscr{F}^{-1}\rho(a(\xi))\mathscr{F}f = \left[\mathscr{F}^{-1}\rho(\eta_1, \dots, \eta_m)\mathscr{F}f(A_*^{-1}\cdot)\right](A_*\cdot). \tag{1.2.16}$$

由 $\rho \in M_p(\mathbb{R}^m)$, 有

$$\|\mathscr{F}^{-1}\rho(a(\cdot))\mathscr{F}f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} = |A|^{-1}\|\mathscr{F}^{-1}\rho\mathscr{F}f(A_*^{-1}\cdot)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$$

$$\leqslant \|\rho\|_{M_p(\mathbb{R}^m)}\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}. \tag{1.2.17}$$

由此得

$$\|\rho(a(\cdot))\|_{M_p(\mathbb{R}^n)} \leqslant \|\rho\|_{M_p(\mathbb{R}^m)}. \tag{1.2.18}$$

再令 $f = f_1(x_1, ..., x_m)f_2(x_{m+1}, ..., x_n)$, 就可以证明(1.2.18)的反向不等式也对. □

由于平移变换保持乘子范数不变, 再结合命题 1.2.4 知道 $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ $(n \geqslant m)$ 上满的仿射变换也保持乘子范数不变.

下面给出一个乘子的判别法, 简单但非常实用.

命题1.2.5. (Bernstein乘子定理) 设 $L > n/2$ 为整数, $\rho \in H^L$, [4] 则有 $\rho \in M_p$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$ 且

$$\|\rho\|_{M_p} \lesssim \|\rho\|_2^{1-n/2L}\left(\sum_{i=1}^n \left\|\partial_{x_i}^L \rho\right\|_2\right)^{n/2L}. \tag{1.2.19}$$

证明. 由命题 1.2.2, 只需要对 $p = 1$ 证明 (1.2.19). 显然

$$\|\rho\|_{M_1} \leqslant \int_{\mathbb{R}^n} |\mathscr{F}^{-1}\rho(x)|dx \tag{1.2.20}$$

对任何 $t > 0$,

$$\int_{|x|<t} |\mathscr{F}^{-1}\rho(x)|dx \lesssim t^{n/2}\|\rho\|_2. \tag{1.2.21}$$

记 $J(x) = \sum_{i=1}^n |x_i|^L$, 又有

$$\begin{aligned}\int_{|x|>t} |F^{-1}\rho(x)|dx &= \int_{|x|>t} J(x)^{-1}J(x)\left|\mathscr{F}^{-1}\rho(x)\right|dx \\ &\lesssim t^{n/2-L}\sum_{i=1}^n \left\|\partial_{x_i}^L \rho\right\|_2. \end{aligned}\tag{1.2.22}$$

取 t 满足 $\|\rho\|_2 = t^{-L}\sum_{i=1}^n \|\partial_{x_i}^L\rho\|_2$, (1.2.20)–(1.2.22) 蕴含了结论. □

最后, 我们再列举一个常用的乘子估计, 其证明相对较长, 需用到较多的调和分析的基本内容, 故略去证明, 可见 [11].

[4] $\|\rho\|_{H^L} = \sum_{|\alpha|\leqslant L} \|D^\alpha\rho\|_2$

命题1.2.6. （Mihlin乘子定理）设 $L > n/2$ 为整数, 又设$\rho \in L^\infty$ 满足

$$|\xi|^{|\alpha|}|D^\alpha \rho(\xi)| \leqslant A, \quad |\alpha| \leqslant L, \quad \xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \tag{1.2.23}$$

则有 $\rho \in M_p$, $1 < p < \infty$ 且

$$\|\rho\|_{M_p} \leqslant C_p A, \tag{1.2.24}$$

C_p表示依赖于p的常数.

§1.3　二进制分解, Besov、Triebel-Lizorkin空间

巧妙的数学思想常有撼人心志之美, 二进制分解属于其中之一.　——作者

我们考虑频率空间 $\mathbb{R}^n$ 的分解, 记

$$\mathcal{R}_0 = \{\xi : |\xi| < 1\}, \quad \mathcal{R}_k = \{\xi : 2^{k-1} \leqslant |\xi| < 2^k\}, \quad k \in \mathbb{N}, \tag{1.3.1}$$

容易看出, $\mathcal{R}_k$ 两两互不相交且有 $\mathbb{R}^n = \cup_{k=0}^\infty \mathcal{R}_k$. 即 $\{\mathcal{R}_k\}$ 构成频率空间的一个分解. 按照这一分解, 我们可以粗略地定义 Littlewood-Paley 分解算子(也叫二进制分解算子)如下:

$$\triangle_k \sim \mathscr{F}^{-1}\chi_{\mathcal{R}_k}\mathscr{F}, \ k \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \tag{1.3.2}$$

其中 $\chi_{\mathcal{R}_k}$ 表示 $\mathcal{R}_k$ 上的特征函数. 可以看出, 二进制分解算子是针对频率空间进行局部化得到的. 二进制分解是调和分析领域精妙而深刻的想法之一, 读者需要反复品味. (1.3.2) 表述虽然直观, 但是应用不方便. 为了便于微分、乘子等运算, 我们需要采用 (1.3.2) 的光滑形式.

设 $\psi: \mathbb{R}^n \to [0,1]$ 为一个光滑的径向截断函数, 如:

$$\psi(\xi) = \begin{cases} 1, & |\xi| \leqslant 1, \\ \text{smooth}, & 1 < |\xi| < 2, \\ 0, & |\xi| \geqslant 2. \end{cases} \tag{1.3.3}$$

再记

$$\varphi(\xi) = \psi(\xi) - \psi(2\xi), \tag{1.3.4}$$

然后引入下面的函数列 $\{\varphi_k\}_0^\infty$:

$$\begin{cases} \varphi_k(\xi) = \varphi(2^{-k}\xi), \quad k \in \mathbb{N}, \\ \varphi_0(\xi) = 1 - \sum_{k=1}^\infty \varphi_k(\xi) = \psi(\xi), \end{cases} \tag{1.3.5}$$

由于 $\operatorname{supp}\varphi \subset \{\xi : 2^{-1} \leqslant |\xi| \leqslant 2\}$ 易见 $\operatorname{supp}\varphi_k \subset \{\xi : 2^{k-1} \leqslant |\xi| \leqslant 2^{k+1}\}$, $k \in \mathbb{N}$, $\operatorname{supp}\varphi_0 \subset \{\xi : |\xi| \leqslant 2\}$. 定义

$$\triangle_k = \mathscr{F}^{-1}\varphi_k\mathscr{F}, \quad k \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \tag{1.3.6}$$

我们称 $\{\triangle_k\}_{k=0}^{\infty}$ 为 Littlewood–Paley (二进制) 分解算子. 从形式上容易看出 (注意仅仅是形式上),

$$\sum_{k=0}^{\infty} \triangle_k = I. \tag{1.3.7}$$

下面我们将使用二进制分解算子引入 Besov 空间 $B^s_{p,q}$ 和 Triebel-Lizorkin空间$F^s_{p,q}$. 设

$$-\infty < s < \infty, \quad 1 \leqslant p, q \leqslant \infty. \tag{1.3.8}$$

定义下面的空间类:

$$B^s_{p,q} = \left\{ f \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n) : \|f\|_{B^s_{p,q}} < \infty \right\}, \tag{1.3.9}$$

$$\|f\|_{B^s_{p,q}} := \left(\sum_{k=0}^{\infty} 2^{ksq} \|\triangle_k f\|_p^q \right)^{1/q}, \tag{1.3.10}$$

$B^s_{p,q}$被称为是 Besov 空间[5]. 又设

$$-\infty < s < \infty, \quad 1 \leqslant p < \infty, \quad 1 \leqslant q \leqslant \infty, \tag{1.3.11}$$

定义下面的空间类:

$$F^s_{p,q} = \left\{ f \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n) : \|f\|_{F^s_{p,q}} < \infty \right\}, \tag{1.3.12}$$

$$\|f\|_{F^s_{p,q}} := \left\| \left(\sum_{k=0}^{\infty} 2^{ksq} |\triangle_k f|^q \right)^{1/q} \right\|_p, \tag{1.3.13}$$

$F^s_{p,q}$ 被称为是Triebel-Lizorkin空间[6].

Besov 空间和 Triebel-Lizorkin 空间形成于20世纪60–80年代, 近年来在 PDE 领域开始得到广泛应用. 粗略地讲, 上述空间类是频率空间的局部化技

---

[5] $B^s_{p,q}$的定义中可以容许$0 < p, q < 1$, 读者若对该情况感兴趣, 可以参考Triebel[157].

[6] $F^s_{\infty,q}$的定义可以在Triebel的著作[157]中找到, 本书并不关心这一情形, 故略去讨论.

术——二进制分解和函数空间 $\ell^q(L^p)$ 或 $L^p(\ell^q)$[7] 相互结合的产物, 定义中的 s 是刻划空间的正则性的, 相当于直到 s 阶导数. 另一方面, 人们可能会问, 为什么对频率空间做二进制分解, 作者认为这可能和 $L^p(\mathbb{R}^n)$ 上的等价范数有关:

$$\|f\|_p \sim \|f\|_{F^0_{p,2}}, \quad 1<p<\infty. \tag{1.3.14}$$

(1.3.14)即是著名的Littlewood–Paley平方函数定理(见附录).

特别强调, 以下若无特别声明, 对 $B^s_{p,q}$ 和 $F^s_{p,q}$, 我们总是分别假设条件(1.3.8) 和 (1.3.11) 满足. 为了简化叙述, 我们将用 X 表示 B 或 F, 即$X^s_{p,q}$ 表示 $B^s_{p,q}$ 或 $F^s_{p,q}$. 下面第一个命题是关于 $X^s_{p,q}$ 的简单嵌入关系的:

命题1.3.1. 设$X^s_{p,q}$表示$B^s_{p,q}$或$F^s_{p,q}$. 则成立下面的嵌入关系.

(1) 设$q_1\leqslant q_2$, 则

$$X^s_{p,q_1}\subset X^s_{p,q_2}; \tag{1.3.15}$$

(2) 设$\varepsilon>0$, $1\leqslant q_1,q_2\leqslant\infty$, 则

$$X^{s+\varepsilon}_{p,q_1}\subset X^s_{p,q_2}; \tag{1.3.16}$$

(3) 设$p<\infty$, 则

$$B^s_{p,p\wedge q}\subset F^s_{p,q}\subset B^s_{p,p\vee q}. \tag{1.3.17}$$

证明. 由于$\ell^p\subset\ell^{p+a}$, $a\geqslant 0$, 我们可以得到(1)的证明. 又由

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty}2^{skq_2}|a_k|^{q_2}\right)^{1/q_2}\lesssim \sup_{k\geqslant 0}2^{(s+\varepsilon)k}|a_k|, \tag{1.3.18}$$

对$a_k=\|\triangle_k f\|_p$或$a_k=|\triangle_k f|$, 我们可以证明(2). 最后我们证明(3). 记$b_k=2^{sk}\triangle_k f$. 证明分成下面两种情况.

情况1. 考虑$q\leqslant p$的情况. 由$\ell^q\subset\ell^p$ 和Minkowski不等式,

$$\|b_k\|_{\ell^p(L^p)}\leqslant\|b_k\|_{L^p(\ell^q)}\leqslant\|b_k\|_{\ell^q(L^p)}. \tag{1.3.19}$$

这已经包含所要的结论.

情况2. 考虑$q\geqslant p$的情况. 这种情况与上面情形1是类似的, 也是使用Minkowski不等式和嵌入$\ell^p\subset\ell^q$得到结论. □

下面我们考虑$X^s_{p,q}$的基本问题: $X^s_{p,q}$是否为Banach空间, 回答是肯定的.

[7] $\|(a_k)\|_{\ell^q(L^p)}:=\left(\sum_k\|a_k(x)\|_p^q\right)^{1/q}$, $\|(a_k)\|_{L^p(\ell^q)}:=\left\|\left(\sum_k|a_k(x)|^q\right)^{1/q}\right\|_p$.

命题1.3.2. 设$X^s_{p,q}$表示$B^s_{p,q}$或$F^s_{p,q}$. 则

(1) $X^s_{p,q}$ 为Banach空间;

(2) $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n) \subset X^s_{p,q} \subset \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$;

(3) 若$1 \leqslant p, q < \infty$, 则$\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$在$X^s_{p,q}$中稠密.

证明. 显然由$\ell^q(L^p)$或$L^p(\ell^q)$为赋范空间, 可以导出$X^s_{p,q}$为赋范空间. 要证明(1), 只需要再证明$X^s_{p,q}$完备, 我们一会儿再证明. 下面我们证明(2)的结论, 分成下面四步完成.

第一步, 证明$\mathscr{S} \subset B^s_{p,\infty}$. 事实上, 对充分大的$L, M, N \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
\|f\|_{B^s_{p,\infty}} &= \sup_{k\geqslant 0} 2^{sk}\|\triangle_k f\|_p \\
&\lesssim \sup_{k\geqslant 0} 2^{sk}\|(1+|x|^2)^L \triangle_k f\|_\infty \\
&\lesssim \sup_{k\geqslant 0} 2^{sk}\|(I-\triangle)^L \varphi_k \mathcal{F} f\|_1 \\
&\lesssim \|(1+|x|^2)^M (I-\triangle)^L \mathcal{F} f\|_\infty \\
&\lesssim p_N(\mathcal{F} f).
\end{aligned} \tag{1.3.20}$$

由$\mathcal{F}: \mathscr{S} \to \mathscr{S}$ 为连续映射, 结合(1.3.20)得到结论.

第二步, 证明$\mathscr{S} \subset X^s_{p,q}$. 由第一步知, $\mathscr{S} \subset B^{s+\varepsilon}_{p,\infty}$. 根据命题1.3.1, 我们知道$B^{s+\varepsilon}_{p,\infty} \subset B^s_{p,p\wedge q} \subset B^s_{p,q} \cap F^s_{p,q}$. 从而结论成立.

第三步, 证明$B^s_{p,\infty} \subset \mathscr{S}'$. 规定$\varphi_{-1} \equiv 0$. 由$\varphi_k$的构造知道, 若$\ell \neq -1, 0, 1$, 则$\varphi_k \varphi_{k+\ell} \equiv 0$. 对任何$f \in B^s_{p,\infty}$, $\psi \in \mathscr{S}$, 取$N \in \mathbb{N}$ 充分大, 有

$$\begin{aligned}
|\langle f, \psi\rangle| &\leqslant \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\ell=-1}^{1} |\langle \triangle_k f, \ \mathcal{F}\varphi_{k+\ell}\mathcal{F}^{-1}\psi\rangle| \\
&\lesssim \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\ell=-1}^{1} \|\triangle_k f\|_p \|\triangle_{k+\ell}\psi\|_{p'} \\
&\lesssim \|f\|_{B^s_{p,\infty}} \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-sk}\|\triangle_k \psi\|_{p'} \\
&= \|f\|_{B^s_{p,\infty}} \|\psi\|_{B^{-s+\varepsilon}_{p',\infty}} \\
&\lesssim \|f\|_{B^s_{p,\infty}} p_N(\mathcal{F}\psi).
\end{aligned} \tag{1.3.21}$$

若ψ取遍$\mathscr{S}$中的某个有界集B, 我们知道$p_N(\mathcal{F}\psi) \lesssim 1$. 于是我们证明了所要结论.

第四步, 类似第二步, 我们可以得到$X^s_{p,q}\subset\mathscr{S}'$, 详细从略.

最后证明$B^s_{p,q}$的完备性, $F^s_{p,q}$的完备性可以类似证明. 设$\{f_\ell\}_1^\infty$为$B^s_{p,q}$中的Cauchy列. 由(2)的结论知它也为$\mathscr{S}'$中的Cauchy列. 由于$\mathscr{S}'$为完备的局部凸拓扑线性空间, 所以存在$f\in\mathscr{S}'$满足$f_\ell\to f$(按$\mathscr{S}'$的强拓扑). 另一方面, $\{f_\ell\}_1^\infty$为$B^s_{p,q}$中的Cauchy列也蕴含着$\{\triangle_k f_\ell\}_{\ell=1}^\infty$为$L^p$中的Cauchy列. 根据$L^p$的完备性, 存在$g_k\in L^p$使得

$$\|\triangle_k f_\ell-g_k\|_p\to 0,\quad \ell\to\infty. \tag{1.3.22}$$

由于在$\mathscr{S}'$中$\triangle_k f_\ell\to\triangle_k f$, $\ell\to\infty$, 且$L^p\subset\mathscr{S}'$, 我们立即得到$g_k=\triangle_k f$. 从而, (1.3.22)蕴含

$$\|\triangle_k(f_\ell-f)\|_p\to 0,\quad \ell\to\infty. \tag{1.3.23}$$

由(1.3.23)和Fatou引理, 我们得到$\|f_\ell-f\|_{B^s_{p,q}}\to 0$. □

§1.4 $X^s_{p,q}$中的嵌入定理

众所周知, $L^p(\mathbb{R}^n)$和$L^q(\mathbb{R}^n)$ $(p\neq q)$之间没有包含关系, 它们之间的范数无法比较. 但是, 如果我们将频率空间局限到$\mathbb{R}^n$的一个紧子集Ω上, 则可以证明

$$\|\mathscr{F}^{-1}\chi_\Omega\mathscr{F}f\|_q\lesssim\|\mathscr{F}^{-1}\chi_\Omega\mathscr{F}f\|_p,\quad p\leqslant q. \tag{1.4.1}$$

这一性质应用到二进制分解算子, 便产生了Besov空间的嵌入关系. 这正是频率空间局部化技术的优势之一.

设Ω为$\mathbb{R}^n$的一个紧子集, 记

$$\mathscr{S}_\Omega=\{f\in\mathscr{S}:\ \operatorname{supp}\mathscr{F}f\subset\Omega\}. \tag{1.4.2}$$

命题1.4.1. 假设$1\leqslant p\leqslant q\leqslant\infty$. 则有

$$\|f\|_q\lesssim\|f\|_p,\quad \forall\, f\in\mathscr{S}_\Omega. \tag{1.4.3}$$

证明. 设$\psi\in\mathscr{S}$满足$\mathscr{F}\psi(\xi)=1$, $\forall\,\xi\in\Omega$. 由$f\in\mathscr{S}_\Omega$知道$\mathscr{F}f=\mathscr{F}f\cdot\mathscr{F}\psi$. 即有

$$f(x)=C\int_{\mathbb{R}^n}\psi(x-y)f(y)dy. \tag{1.4.4}$$

使用Hölder不等式,

$$\|f\|_\infty \lesssim \|\psi\|_{p'}\|f\|_p \lesssim \|f\|_p, \tag{1.4.5}$$

于是对$q \geqslant p$,

$$\|f\|_q \leqslant \|f\|_\infty^{1-p/q}\|f\|_p^{p/q} \lesssim \|f\|_p, \tag{1.4.6}$$

这已经蕴含结论. □

又记

$$L^p_\Omega = \{f \in L^p :\ \operatorname{supp} \mathscr{F} f \subset \Omega\} \tag{1.4.7}$$

使用(1.4.2),结合标准的正则化逼近方法, 我们有

命题1.4.2. 假设$1 \leqslant p \leqslant q \leqslant \infty$. 则有

$$\|f\|_q \lesssim \|f\|_p, \quad \forall\ f \in L^p_\Omega. \tag{1.4.8}$$

推论1.4.3. 假设$1 \leqslant p \leqslant q \leqslant \infty$, $B_\lambda = \{\xi :\ |\xi| \leqslant \lambda\}$. 则有

$$\|f\|_q \lesssim \lambda^{n(1/p-1/q)}\|f\|_p \quad \forall\ f \in L^p_{B_\lambda}. \tag{1.4.9}$$

证明. 由于

$$\|f\|_q = \lambda^{-n/q}\|f(\cdot/\lambda)\|_q, \tag{1.4.10}$$
$$\mathscr{F}(f(\cdot/\lambda)) = \lambda^n(\mathscr{F} f)(\lambda\cdot), \tag{1.4.11}$$

易知若$f \in L^p_{B_\lambda}$, 则有$f(\cdot/\lambda) \in L^p_{B_1}$, 使用(1.4.10), (1.4.11)和命题1.4.2得到结论. □

设φ_k由(1.3.5)定义, 注意φ_k的构造, $\operatorname{supp}\varphi_k \subset B_{2^{k+1}}$. 故对任何$1 \leqslant p_1 \leqslant p_2 \leqslant \infty$, 应用(1.4.9),

$$\|\triangle_k f\|_{p_2} \lesssim 2^{n(1/p_1-1/p_2)k}\|\triangle_k f\|_{p_1}. \tag{1.4.12}$$

又设s_1, s_2满足

$$s_1 - \frac{n}{p_1} = s_2 - \frac{n}{p_2}. \tag{1.4.13}$$

使用(1.4.12)和(1.4.13), 我们得到

$$2^{s_2 k}\|\triangle_k f\|_{p_2} \lesssim 2^{s_1 k}\|\triangle_k f\|_{p_1}, \tag{1.4.14}$$

(1.4.14)两端求ℓ^r范数得

$$\|f\|_{B^{s_2}_{p_2,r}} \lesssim \|f\|_{B^{s_1}_{p_1,r}}. \tag{1.4.15}$$

于是, 我们证明了

定理 1.4.4. 设$1 \leqslant p_1 \leqslant p_2 \leqslant \infty$, $1 \leqslant r \leqslant \infty$ 满足$s_1 - n/p_1 = s_2 - n/p_2$. 则有

$$B^{s_1}_{p_1,r} \subset B^{s_2}_{p_2,r}. \tag{1.4.16}$$

关于$F^s_{p,q}$, 有类似(1.4.16), 但比(1.4.16) 更好一些的结果:

定理 1.4.5. 设$1 \leqslant p_1 < p_2 < \infty$, $1 \leqslant r, q \leqslant \infty$, $-\infty < s_2 < s_1 < \infty$ 满足$s_1 - n/p_1 = s_2 - n/p_2$. 则有

$$F^{s_1}_{p_1,q} \subset F^{s_2}_{p_2,r}. \tag{1.4.17}$$

证明. 由命题1.3.1, 我们只需要证明

$$F^{s_1}_{p_1,\infty} \subset F^{s_2}_{p_2,1} \tag{1.4.18}$$

即可. 不妨设$\|f\|_{F^{s_1}_{p_1,\infty}} = 1$. 回忆$L^p$ 上的等价范数

$$\|g\|_p^p \sim \int_0^\infty t^{p-1}|\{x : |g(x)| > t\}|dt, \tag{1.4.19}$$

其中$|\{\cdots\}|$表示集合$\{\cdots\}$的测度. 故有

$$\begin{aligned}\|f\|^{p_2}_{F^{s_2}_{p_2,1}} \sim & \int_0^A t^{p_2-1}\left|\left\{x : \sum_{k=0}^\infty 2^{ks_2}|(\triangle_k f)(x)| > t\right\}\right| dt \\ & + \int_A^\infty t^{p_2-1}\left|\left\{x : \sum_{k=0}^\infty 2^{ks_2}|(\triangle_k f)(x)| > t\right\}\right| dt \\ :=& I + II,\end{aligned} \tag{1.4.20}$$

其中$A \gg 1$表示一个固定常数. 易见

$$\sum_{k=K+1}^\infty 2^{ks_2}|\triangle_k f| \lesssim 2^{K(s_2-s_1)} \sup_{k\geqslant 0} 2^{ks_1}|\triangle_k f|. \tag{1.4.21}$$

应用(1.4.21)我们可以首先得到I的估计(取$K=-1$),

$$\begin{aligned} I &\lesssim \int_0^A t^{p_2-1}\left|\left\{x:\sup_{k\geqslant 0}2^{ks_1}|(\triangle_k f)(x)|>ct\right\}\right|dt \\ &\lesssim \int_0^{cA} \tau^{p_1-1}\left|\left\{x:\sup_{k\geqslant 0}2^{ks_1}|(\triangle_k f)(x)|>\tau\right\}\right|d\tau \\ &\lesssim 1. \end{aligned} \tag{1.4.22}$$

下面我们估计II. 由推论1.4.3,

$$\|\triangle_k f\|_\infty \lesssim 2^{kn/p_1}\|\triangle_k f\|_{p_1} \lesssim 2^{k(n/p_1-s_1)}\|f\|_{F^{s_1}_{p_1,\infty}}, \tag{1.4.23}$$

从而, 对$K\in\mathbb{N}\cup\{0\}$,

$$\sum_{k=0}^K 2^{ks_2}|\triangle_k f| \lesssim \sum_{k=0}^K 2^{k(s_2-s_1+n/p_1)} \lesssim 2^{Kn/p_2}. \tag{1.4.24}$$

选取K为满足$C2^{Kn/p_2}\leqslant t/2$的最大自然数, 即有$2^K\sim t^{p_2/n}$. 当$t\geqslant A\gg 1$时上面的K总是存在的. 若$t\geqslant A$, 且$\sum_{k=0}^\infty 2^{ks_2}|(\triangle_k f)(x)|\geqslant t$, 则由(1.4.21), (1.4.24)得

$$C2^{K(s_2-s_1)}\sup_{k\geqslant 0}2^{ks_1}|\triangle_k f| \geqslant \sum_{k=K+1}^\infty 2^{ks_2}|\triangle_k f| > t/2. \tag{1.4.25}$$

综合(1.4.19), (1.4.25), 我们得到

$$\begin{aligned} II &\lesssim \int_A^\infty t^{p_2-1}\left|\left\{x:\sup_{k\geqslant 0}2^{ks_1}|(\triangle_k f)(x)|>ct^{p_2/p_1}\right\}\right|dt \\ &\lesssim \int_{A'}^\infty \tau^{p_1-1}\left|\left\{x:\sup_{k\geqslant 0}2^{ks_1}|(\triangle_k f)(x)|>\tau\right\}\right|d\tau \\ &\lesssim 1. \end{aligned} \tag{1.4.26}$$

I和II的估计蕴含结论. □

命题1.4.6. 设$1\leqslant p<\infty$, $s>n/p$, $1\leqslant q\leqslant\infty$. 设$X^s_{p,q}$表示$B^s_{p,q}$或$F^s_{p,q}$. 则有

$$X^s_{p,q}\subset B^0_{\infty,1}\subset L^\infty. \tag{1.4.27}$$

证明. 由二进制分解的定义和(1.4.12),

$$\begin{aligned}\|u\|_\infty &\leqslant \sum_{k=0}^{\infty}\|\triangle_k u\|_\infty \lesssim \sum_{k=0}^{\infty} 2^{kn/p}\|\triangle_k u\|_p\\ &\lesssim \left(\sum_{k=0}^{\infty} 2^{k(n/p-s)}\right)\|u\|_{B^s_{p,\infty}} \leqslant \|u\|_{X^s_{p,q}}.\end{aligned} \tag{1.4.28}$$

□

§1.5　$X^s_{p,q}$上范数的微分–差分表示

从历史的发展来看, Besov空间上的范数早期不是用二进制分解来定义的, 而是用微分–差分来定义的. 这种微分–差分表示在PDE中进行非线性估计时运用起来十分方便, 本节我们来推导$X^s_{p,q}$上范数的微分–差分表示. 为方便, 我们记

$$\triangle_h^m f(x) = \sum_{k=0}^{m} C_m^k (-1)^{m-k} f(x+kh), \tag{1.5.1}$$

$$\omega_p^m(t,f) = \sup_{|h|\leqslant t} \|\triangle_h^m f\|_p. \tag{1.5.2}$$

我们有下面的定理

命题1.5.1. 设$s>0$, $m,N\in\mathbb{N}$且满足$m+N>s$, $0\leqslant N<s$; $1\leqslant p,q\leqslant\infty$, 则有

$$\|f\|_{B^s_{p,q}} \sim \|f\|_p + \sum_{j=1}^{n}\left(\int_0^\infty \left(t^{N-s}\omega_p^m(t,\partial_{x_j}^N f)\right)^q \frac{dt}{t}\right)^{1/q} \tag{1.5.3}$$

证明. 因为$\omega_p^m(t,f)$为t的单调增函数, 故只需证明

$$\|f\|_{B^s_{p,q}} \sim \|f\|_p + \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=-\infty}^{\infty}\left(2^{i(s-N)}\omega_p^m(2^{-i},\ \partial_{x_j}^N f)\right)^q\right)^{1/q} \tag{1.5.4}$$

先设$f\in B^s_{p,q}$. 我们记$\rho_h(\xi)=e^{ih\xi}-1$, 则有

$$\|\triangle_h^m \partial_{x_j}^N f\|_p = \|\mathscr{F}^{-1}\rho_h^m \mathscr{F}\partial_{x_j}^N f\|_p \leqslant \sum_{k=0}^{\infty}\|\mathscr{F}^{-1}\rho_h^m\varphi_k\mathscr{F}\partial_{x_j}^N f\|_p \tag{1.5.5}$$

下面证明[8]

$$\|\mathscr{F}^{-1}\rho_h^m\varphi_k\mathscr{F}\partial_{x_j}^N f\|_p \lesssim \min(1,|h|^m 2^{km})2^{Nk}\|\triangle_k f\|_p \tag{1.5.6}$$

注意φ_k的构造($\varphi_{-1}=0$),

$$\|\mathscr{F}^{-1}\rho_h^m\varphi_k\mathscr{F}\partial_{x_j}^N f\|_p \lesssim \sum_{\ell=-1}^{1}\|\mathscr{F}^{-1}\rho_h^m\varphi_{k+\ell}\mathscr{F}\triangle_k\partial_{x_j}^N f\|_p. \tag{1.5.7}$$

显然由差分定义$\rho_h\in M_p$, 由M_p的代数性质得$\rho_h^m\in M_p$. 使用命题1.2.4的(1.2.13), 从而再由M_p的代数性质$\rho_h^m\varphi_k\in M_p$, 故由(1.5.7)得

$$\|\mathscr{F}^{-1}\rho_h^m\varphi_k\mathscr{F}\partial_{x_j}^N f\|_p \lesssim \|\triangle_k\partial_{x_j}^N f\|_p. \tag{1.5.8}$$

观察下面的等式

$$\rho_h^m\varphi_k = \frac{\rho_h^m}{\langle h,\xi\rangle^m}\left\langle \frac{h}{|h|},\frac{\xi}{|\xi|}\right\rangle^m (|h||\xi|)^m\varphi_k \tag{1.5.9}$$

且注意$\|\rho_h^m/\langle h,\xi\rangle^m\|_{M_p(\mathbb{R}^n)}=\|(e^{i\xi}-1)/\xi\|_{M_p(\mathbb{R})}<\infty$. 故当$k\geqslant 1$时, 由(1.5.9)的表示,

$$\|\rho_h^m\varphi_k\|_{M_p}\lesssim 2^{km}|h|^m. \tag{1.5.10}$$

又显然(1.5.10)对$k=0$也对, 从而由(1.5.7)得

$$\|\mathscr{F}^{-1}\rho_h^m\varphi_k\mathscr{F}\partial_{x_j}^N f\|_p \lesssim 2^{km}|h|^m\|\triangle_k\partial_{x_j}^N f\|_p. \tag{1.5.11}$$

再次利用(1.5.7)的技巧和乘子性质(1.2.13),

$$\|\partial_{x_j}^N\triangle_k f\|_p\lesssim 2^{Nk}\|\triangle_k f\|_p. \tag{1.5.12}$$

综合(1.5.8)(1.5.11)和(1.5.12)便得(1.5.6). 将(1.5.6)的估计代入(1.5.5)有

$$2^{i(s-N)}\omega_p^m(2^{-i},\partial_{x_j}^N f)\lesssim\sum_{k=0}^{\infty}2^{(i-k)(s-N)}(1\wedge 2^{(k-i)m})2^{sk}\|\triangle_k f\|_p. \tag{1.5.13}$$

应用(1.5.13), 并使用序列形式的卷积Young不等式,

$$\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=-\infty}^{\infty}\left(2^{i(s-N)}\omega_p^m(2^{-i},\ \partial_{x_j}^N f)\right)^q\right)^{1/q}\lesssim\|f\|_{B^s_{p,q}}. \tag{1.5.14}$$

[8]注意不要混淆差分算子和二进制分解算子.

显然有$\|f\|_p \lesssim \|f\|_{B^s_{p,q}}$. 所以(1.5.3)的左端可以控制右端.

下面, 我们来证明(1.5.3)的右端可以控制左端. 令$\rho_{jk}(\xi) = e^{\mathrm{i}2^{-k}\xi_j} - 1$. 我们只需要证明

$$\|\triangle_k f\|_p \lesssim 2^{-Nk} \sum_{j=1}^{n} \|\mathscr{F}^{-1}\rho^m_{jk}\mathscr{F}\partial^N_{x_j} f\|_p, \quad k \geqslant 1. \tag{1.5.15}$$

事实上, 若(1.5.15)成立, 则由$\omega^m_p(t,f)$的定义,

$$\|\mathscr{F}^{-1}\rho^m_{jk}\mathscr{F}\partial^N_{x_j} f\|_p \lesssim \omega^m_p(2^{-k},\ \partial^N_{x_j} f), \quad k \geqslant 1. \tag{1.5.16}$$

故由(1.5.16)和Besov空间范数的定义($\varphi_0 \in M_p$),

$$\|f\|_{B^s_{p,q}} \lesssim \|f\|_p + \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left(2^{k(s-N)} \omega^m_p(2^{-k},\ \partial^N_{x_j} f) \right)^q \right)^{1/q}. \tag{1.5.17}$$

这表明(1.5.3)的右端可以控制左端. 下面我们来证明(1.5.15), 为此需要一个引理:

引理1.5.2. *存在函数χ_j $(j=1,...,n)$ 满足*

$$\sum_{j=1}^{n} \chi_j(\xi) = 1,\ \forall\, \xi \in \{\xi:\ 1/2 \leqslant |\xi| \leqslant 2\}; \tag{1.5.18}$$

$$\operatorname{supp} \chi_j \subset \{\xi = (\xi_1,...,\xi_n):\ |\xi_j| \geqslant 1/3\sqrt{n}\}. \tag{1.5.19}$$

证明. 取非负函数$\kappa \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$使得$\operatorname{supp}\kappa \subset \{\xi \in \mathbb{R}:\ |\xi| \geqslant 1/3\sqrt{n}\}$. 又取非负函数$\zeta \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^{n-1})$使得$\operatorname{supp}\zeta \subset \{\xi \in \mathbb{R}^{n-1}:\ |\xi| \leqslant 3\}$. 为简单令$\xi^j = (\xi_1,...,\xi_{j-1},\xi_{j+1},...,\xi_n)$. 又记

$$\chi_j(\xi) = \begin{cases} \frac{\kappa(\xi_j)\zeta(\xi^j)}{\sum_{j=1}^n \kappa(\xi_j)\zeta(\xi^j)}, & \sum_{j=1}^n \kappa(\xi_j)\zeta(\xi^j) \neq 0, \\ 0, & \sum_{j=1}^n \kappa(\xi_j)\zeta(\xi^j) = 0. \end{cases} \tag{1.5.20}$$

容易验证χ_j满足引理的条件. □

最后完成(1.5.15)的证明. 由上面的引理, 对$k \geqslant 1$,

$$\|\triangle_k f\|_p \leqslant \sum_{j=1}^{n} \|\mathscr{F}^{-1}\rho^{-m}_{jk}\varphi_k\chi_j(2^{-k}\cdot)\xi_j^{-N}\mathscr{F}(\mathscr{F}^{-1}\rho^m_{jk}\mathscr{F}\partial^N_{x_j} f)\|_p. \tag{1.5.21}$$

由命题1.2.5,

$$(e^{\mathrm{i}\xi_j}-1)^{-m}\varphi\chi_j\xi_j^{-N}\in M_p, \tag{1.5.22}$$

其中φ见(1.3.4), 再由命题1.2.4和(1.5.21)即有(1.5.15)成立. □

显然, 由定理1.5.1可以直接推出

推论1.5.3. 设$s>0$, $s\notin\mathbb{N}$. 用$[s]$表示s的整数部分, $1\leqslant p,q\leqslant\infty$, 则

$$\|f\|_{B^s_{p,q}}\sim\|f\|_p+\sum_{j=1}^{n}\left(\int_0^\infty\left(t^{[s]-s}\sup_{|h|\leqslant t}\|\triangle_h\,\partial^{[s]}_{x_j}f\|_p\right)^q\frac{dt}{t}\right)^{1/q} \tag{1.5.23}$$

其中$\triangle_h$表示一次差分.

在做发展方程的非线性估计时, 应用(1.5.23)非常方便.

§1.6 齐次空间$\dot{X}^s_{p,q}$

设φ由(1.3.4)定义, 平行于(1.3.5), 我们可以很自然地定义下面的函数列$\{\varphi_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$:

$$\varphi_k(\xi)=\varphi(2^{-k}\xi),\quad k\in\mathbb{Z}. \tag{1.6.1}$$

易知

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}}\varphi_k(\xi)=1,\quad \xi\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}, \tag{1.6.2}$$

按照(1.3.6)的方式, 可以定义

$$\triangle_k=\mathscr{F}^{-1}\varphi_k\mathscr{F},\quad k\in\mathbb{Z} \tag{1.6.3}$$

平行于$X^s_{p,q}$, 下面我们使用$\{\triangle_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$和函数空间$\ell^q(L^p)$, $L^p(\ell^q)$ 相互结合来定义$\dot{X}^s_{p,q}$. 注意在(1.6.1)−(1.6.3)中, 对频率空间中$\xi=0$点没有做任何要求, 因此需要对Schwartz空间$\mathscr{S}$及其对偶空间$\mathscr{S}'$也做相应修改. 记

$$\dot{\mathscr{S}}(\mathbb{R}^n)=\{f\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^n):(D^\alpha\widehat{f})(0)=0,\ \forall\alpha\}. \tag{1.6.4}$$

$\dot{\mathscr{S}}:=\dot{\mathscr{S}}(\mathbb{R}^n)$作为$\mathscr{S}$的子空间, 其上赋与$\mathscr{S}$一样的拓扑, 再用$\dot{\mathscr{S}}':=\dot{\mathscr{S}}'(\mathbb{R}^n)$表示$\dot{\mathscr{S}}$的拓扑对偶空间. 由此可以引入齐次空间$\dot{X}^s_{p,q}$, 设[9]

$$-\infty<s<\infty,\ 1\leqslant p,q\leqslant\infty \tag{1.6.5}$$

[9] 与前面一样, 我们也可以考虑$0<p,q\leqslant\infty$ 的情形.

定义:

$$\dot{B}^s_{p,q} = \left\{ f \in \dot{\mathscr{S}}'(\mathbb{R}^n) : \|f\|_{\dot{B}^s_{p,q}} < \infty \right\}, \tag{1.6.6}$$

$$\|f\|_{\dot{B}^s_{p,q}} := \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} 2^{ksq} \|\triangle_k f\|_p^q \right)^{1/q}, \tag{1.6.7}$$

$\dot{B}^s_{p,q}$被称为是齐次Besov空间. 又设

$$-\infty < s < \infty, \quad 1 \leqslant p < \infty, \quad 1 \leqslant q \leqslant \infty, \tag{1.6.8}$$

定义:

$$\dot{F}^s_{p,q} = \left\{ f \in \dot{\mathscr{S}}'(\mathbb{R}^n) : \|f\|_{\dot{F}^s_{p,q}} < \infty \right\}, \tag{1.6.9}$$

$$\|f\|_{\dot{F}^s_{p,q}} := \left\| \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} 2^{ksq} |\triangle_k f|^q \right)^{1/q} \right\|_p, \tag{1.6.10}$$

$\dot{F}^s_{p,q}$被称为是齐次Triebel-Lizorkin空间.

以后我们仍用$\dot{X}^s_{p,q}$, 笼统地称$\dot{B}^s_{p,q}$或$\dot{F}^s_{p,q}$. 使用膨胀变换知

$$\|f(2^\ell \cdot)\|_{\dot{X}^s_{p,q}} = 2^{\ell(n-s/p)} \|f\|_{\dot{X}^s_{p,q}} \tag{1.6.11}$$

由此容易理解为何称$\dot{X}^s_{p,q}$为齐次空间. $\dot{X}^s_{p,q}$与$X^s_{p,q}$有很多相似之处, 我们只列举, 证明与前面类似, 读者可自行完成. 若无特别声明, 对$\dot{B}^s_{p,q}$和$\dot{F}^s_{p,q}$总是分别假定条件(1.6.5)和(1.6.8)满足.

命题1.6.1. 设$\dot{X}^s_{p,q}$为$\dot{B}^s_{p,q}$或$\dot{F}^s_{p,q}$. 则有

(1) $\dot{X}^s_{p,q}$为Banach空间;

(2) $\dot{\mathscr{S}} \subset \dot{X}^s_{p,q} \subset \dot{\mathscr{S}}'$;

(3) 若$1 \leqslant p, q < \infty$, 则$\dot{\mathscr{S}}$在$\dot{X}^s_{p,q}$中稠密;

(4) 若$q_1 \leqslant q_2$, 则$\dot{X}^s_{p,q_1} \subset \dot{X}^s_{p,q_2}$;

(5) 设$1 \leqslant p < \infty$, 则$\dot{B}^s_{p,p\wedge q} \subset \dot{F}^s_{p,q} \subset \dot{B}^s_{p,p\vee q}$

定理 1.6.2. 设$-\infty < s_2 < s_1 < \infty$且$s_1 - n/p_1 = s_2 - n/p_2$, $1 \leqslant r, q \leqslant \infty$

$$\dot{B}^{s_1}_{p_1,r} \subset \dot{B}^{s_2}_{p_2,r}, \quad \dot{F}^{s_1}_{p_1,r} \subset \dot{F}^{s_2}_{p_2,q}$$

本书反复用定理1.6.2. 其中第一个嵌入的证明是平凡的, 和Besov空间的证明一样, 第二个嵌入的证明与Triebel-Lizorkin空间稍有不同, 证明见附录.

定理 1.6.3. 设$s>0$, $m,N\in\mathbb{N}$, $N<s, N+m>s$, $1\leqslant p,q\leqslant\infty$. 则有

$$\|f\|_{\dot{B}^s_{p,q}}\sim\sum_{j=1}^{n}\left(\int_0^\infty t^{q(N-s)}\omega_p^m(t,\partial_{x_j}^N f)^q\frac{dt}{t}\right)^{1/q}.$$

特别若$s>0$, $s\notin\mathbb{N}$, 则

$$\|f\|_{\dot{B}^s_{p,q}}\sim\sum_{j=1}^{n}\left(\int_0^\infty t^{q([s]-s)}\sup_{|h|\leqslant t}\|\triangle_h\,\partial_{x_j}^{[s]}f\|_p^q\frac{dt}{t}\right)^{1/q}.$$

下面的命题是命题1.5.1和定理1.6.3的推论, 表明了齐次和非齐次空间的关系:

命题1.6.4. 设$s>0$, $1\leqslant p,q\leqslant\infty$. 则有

$$B^s_{p,q}=L^p\cap\dot{B}^s_{p,q}$$

最后我们给出齐次Besov空间上的一个插值不等式, 在PDE非线性项的估计中非常有用, 见[43, 51].

命题1.6.5. (凸性Hölder 不等式) 设$1\leqslant p_i,q_i\leqslant\infty$, $0\leqslant\theta_i\leqslant1$, $\sigma_i,\sigma\in\mathbb{R}$ $(i=1,\ldots,N)$, $\sum_{i=1}^N\theta_i=1$, $\sigma=\sum_{i=1}^N\theta_i\sigma_i$, $1/p=\sum_{i=1}^N\theta_i/p_i$, 以及$1/q=\sum_{i=1}^N\theta_i/q_i$. 则有$\cap_{i=1}^N\dot{B}^{\sigma_i}_{p_i,q_i}\subset\dot{B}^\sigma_{p,q}$ 且对任何$v\in\cap_{i=1}^N\dot{B}^{\sigma_i}_{p_i,q_i}$,

$$\|v\|_{\dot{B}^\sigma_{p,q}}\leqslant\prod_{i=1}^N\|v\|^{\theta_i}_{\dot{B}^{\sigma_i}_{p_i,q_i}}.$$

这一估计对$\dot{F}^\sigma_{p,q}$也对$(p,p_i\neq\infty)$.

证明. 先对L^p空间使用Hölder不等式, 再对ℓ^q空间使用Hölder不等式, 即可证明结论. 详细如下:

$$\begin{aligned}\|v\|_{\dot{B}^\sigma_{p,q}}&=\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}}2^{\sigma kq}\|\triangle_k v\|_p^q\right)^{1/q}\\&\leqslant\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}}2^{\sigma kq}\prod_{i=1}^N\|\triangle_k v\|_{p_i}^{\theta_i q}\right)^{1/q}\\&=\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}}\prod_{i=1}^N(2^{k\sigma_i\theta_i}\|\triangle_k v\|_{p_i}^{\theta_i})^q\right)^{1/q}\\&\leqslant\prod_{i=1}^N\|v\|^{\theta_i}_{\dot{B}^{\sigma_i}_{p_i,q_i}}.\end{aligned}$$

对$\dot{F}^\sigma_{p,q}$可做类似讨论. □

§1.7 Bessel(Riesz)位势空间H^s_p ($\dot{H}^s_p$)

回忆$J_s=(I-\Delta)^{s/2}$和$I_s=(-\Delta)^{s/2}$分别被称为Bessel位势和Riesz位势. 设

$$1<p<\infty, \quad -\infty<s<\infty. \tag{1.7.1}$$

我们记

$$H^s_p=\left\{f\in\mathscr{S}':\ \|f\|_{H^s_p}:=\|J_sf\|_p<\infty\right\}; \tag{1.7.2}$$

$$\dot{H}^s_p=\left\{f\in\dot{\mathscr{S}}':\ \|f\|_{\dot{H}^s_p}:=\|I_sf\|_p<\infty\right\}. \tag{1.7.3}$$

H^s_p 和$\dot{H}^s_p$ 分别被称为是Bessel位势空间和Riesz位势空间. 下面我们给出H^s_p和$\dot{H}^s_p$上的等价范数:

定理 1.7.1. (Littlewood–Paley平方函数定理) 设s,p 满足(1.7.1). 则在等价范数意义下, 有

$$H^s_p=F^s_{p,2}, \quad \dot{H}^s_p=\dot{F}^s_{p,2}. \tag{1.7.4}$$

定理1.7.1可以在许多著作中找到, 如见Stein [140], Triebel [157]. 我们这里略去证明.

定理 1.7.2. 设$-\infty<s_2\leqslant s_1<\infty$, $1<p_1\leqslant p_2<\infty$, $s_1-n/p_1=s_2-n/p_2$. 则有

$$H^{s_1}_{p_1}\subset H^{s_2}_{p_2}, \quad \dot{H}^{s_1}_{p_1}\subset\dot{H}^{s_2}_{p_2}. \tag{1.7.5}$$

证明. 这是定理1.7.1和定理1.4.5, 1.6.2的直接推论. □

命题1.7.3. 设s,p 满足(1.7.1). 我们有下面的结论

(1) H^s_p 为Banach空间;

(2) $\mathscr{S}\subset H^s_p\subset\mathscr{S}'$ 且$\mathscr{S}$在H^s_p中稠密;

(3) $B^s_{p,p}\subset H^s_p\subset B^s_{p,2}$ $(1<p\leqslant 2)$, $B^s_{p,2}\subset H^s_p\subset B^s_{p,p}$ $(2\leqslant p<\infty)$;

(4) $H^{s+\varepsilon}_p\subset H^s_p$ $(\varepsilon>0)$;

(5) $H^s_p\subset L^\infty$ $(s>n/p)$.

注记1.7.4. 命题1.7.3中的(1)–(3) 对Riesz位势空间也是成立的, 命题1.7.3的证明也是由定理1.7.1和$F^s_{p,2}$的相关结论得到.

命题1.7.5. 设$s>0$, $1<p<\infty$. 我们有$H_p^s=L^p\cap\dot{H}_p^s$. 如果s为整数, 则有

$$\|f\|_{\dot{H}_p^s}\sim\sum_{|\alpha|=s}\|D^\alpha f\|_p.$$

下面我们再建立一个变形的Hölder不等式, 这一不等式最早似乎见于Pecher [130], 后来作者在博士论文[166]给出下面较为完整的形式.

命题1.7.6. (变形Hölder不等式I) 设$1\leqslant p<\infty$, $1<p_i<\infty$. 设α_i 为多重指标满足$|\alpha_i|\leqslant s_i$, $\rho_i>0$,

$$a_i=\rho_i\left(\frac{1}{p_i}-\frac{s_i-|\alpha_i|}{n}\right),\quad i=0,1,...,N+1. \tag{1.7.6}$$

如果每个$a_i>0$, 且$\sum_{i=0}^{N+1}a_i=1/p$, 则有

$$\left\|\prod_{i=0}^{N+1}|D^{\alpha_i}u_i|^{\rho_i}\right\|_{L^p}\leqslant C\prod_{i=0}^{N+1}\|u_i\|^{\rho_i}_{\dot{H}^{s_i}_{p_i}}. \tag{1.7.7}$$

(1.7.7)中将$\dot{H}^{s_i}_{p_i}$替换为$H^{s_i}_{p_i}$, 结论仍然成立.

证明. 设$q_i=1/a_i$. 由于$1/p=\sum_{i=0}^{N+1}1/q_i$, 我们由Hölder不等式得到

$$\left\|\prod_{i=0}^{N+1}|D^{\alpha_i}u_i|^{\rho_i}\right\|_{L^p}\leqslant\prod_{i=0}^{N+1}\|D^{\alpha_i}u_i\|^{\rho_i}_{\rho_iq_i}\lesssim\prod_{i=0}^{N+1}\|u_i\|^{\rho_i}_{\dot{H}^{|\alpha_i|}_{\rho_iq_i}}. \tag{1.7.8}$$

注意$1/\rho_iq_i-|\alpha_i|/n=1/p_i-s_i/n$, 使用嵌入定理1.7.2, 得到$\dot{H}^{s_i}_{p_i}\subset\dot{H}^{|\alpha_i|}_{\rho_iq_i}$. 结合(1.7.8) 得到结论. □

命题1.7.7. (变形Hölder不等式II) 设$1\leqslant p<\infty$, $1<p_i<\infty$, $|\alpha_i|\leqslant s_i$, $\rho_i>0$, a_i同(1.7.6). 我们有

(1) 如果每个$a_i\neq 0$, 且$\sum_{a_i>0}a_i=1/p$, 则有

$$\left\|\prod_{i=0}^{N+1}|D^{\alpha_i}u_i|^{\rho_i}\right\|_{L^p}\leqslant C\prod_{i=0}^{N+1}\|u_i\|^{\rho_i}_{H^{s_i}_{p_i}}. \tag{1.7.9}$$

(2) 若$\sum_{a_i>0}a_i<1/p\leqslant\sum_{i=1}^{N}\rho_i/p_i$, 则(1.7.9) 仍然成立.

证明. 首先我们证明(1). 不妨假设$a_0,...,a_K>0$, $a_{K+1},...,a_{N+1}<0$. 我们由Hölder不等式得到

$$\Big\|\prod_{i=0}^{N+1}|D^{\alpha_i}u_i|^{\rho_i}\Big\|_{L^p}\lesssim\prod_{i=0}^{K}\|D^{\alpha_i}u_i\|^{\rho_i}_{\rho_i q_i}\prod_{i=K+1}^{N+1}\|D^{\alpha_i}u_i\|^{\rho_i}_{\infty}. \tag{1.7.10}$$

由命题1.7.6知道,

$$\prod_{i=0}^{K}\|D^{\alpha_i}u_i\|^{\rho_i}_{\rho_i q_i}\lesssim\prod_{i=0}^{K}\|u_i\|^{\rho_i}_{\dot H^{s_i}_{p_i}}. \tag{1.7.11}$$

由$a_i<0$ $(i=K+1,...,N+1)$ 和命题1.7.3的(5)知道,

$$\prod_{i=K+1}^{N+1}\|D^{\alpha_i}u_i\|^{\rho_i}_{\infty}\lesssim\prod_{i=K+1}^{N+1}\|D^{\alpha}u_i\|^{\rho_i}_{H^{s_i-|\alpha_i|}_{p_i}}\lesssim\prod_{i=K+1}^{N+1}\|u_i\|^{\rho_i}_{H^{s_i}_{p_i}}. \tag{1.7.12}$$

结合(1.7.10)–(1.7.12) 得到结论.

下面证明(2). 不失一般性, 我们假设$a_0,...,a_K>0$, $a_{K+1}=...=a_J=0$, $a_{J+1},...,a_{N+1}<0$.

情况1. $1/p\leqslant\sum_{i=0}^K\rho_i/p_i$. 由已知条件我们首先可以取到$q_{K+1},...,q_N\gg 1$ (对任何$i>K$, $q_i>p_i/\rho_i$) 满足

$$\sum_{i=0}^{K}a_i+\sum_{i=K+1}^{N+1}\frac{1}{q_i}<\frac{1}{p}\leqslant\sum_{i=0}^{K}\frac{\rho_i}{p_i}. \tag{1.7.13}$$

从而一定可以选取到q_i $(i=0,...,K)$ 满足$p_i/\rho_i\leqslant q_i\leqslant 1/a_i$ 且$1/p=\sum_{i=0}^{N+1}1/q_i$. 重复上面的计算, 得到

$$\Big\|\prod_{i=0}^{N+1}|D^{\alpha_i}u_i|^{\rho_i}\Big\|_{L^p}\leqslant C\prod_{i=0}^{N+1}\|u_i\|^{\rho_i}_{H^{|\alpha_i|}_{\rho_i q_i}}. \tag{1.7.14}$$

由于$1/q_i\rho_i\geqslant 1/p_i-(s-|\alpha_i|)/n$, $p_i\leqslant q_i\rho_i$, 我们知道$H^{s_i}_{p_i}\subset H^{|\alpha_i|}_{\rho_i q_i}$. 再结合(1.7.14)得到结论.

情形2. $\sum_{i=0}^K\rho_i/p_i<1/p\leqslant\sum_{i=0}^{N+1}\rho_i/p_i$. 此时可令$q_i=p_i/\rho_i$, $i=0,...,K$. 对$i=K+1,...,N+1$, 又总可以找到$q_i\in[p_i/\rho_i,\infty)$ 使得$1/p=\sum_{i=0}^{N+1}1/q_i$. 平行如上的讨论, 就可以得到结论的证明. □

§1.8 Gagliardo-Nirenberg 不等式: 分数阶导数情形

我们把Gagliardo-Nirenberg (GN) 不等式推广成分数阶导数形式, 通过使用二进制分解, 对这一不等式得到了一个非常简单的证明. 另外, 分数阶导数情形也是有独立意义的. 本节的结果是由本书第一作者得到的, 没有发表过.

§1.8.1 Besov 空间情形

命题1.8.1. 设$0 < p, p_i, q, q_i \leqslant \infty$, $s, s_0, s_1 \in \mathbb{R}$, $s_0 \leqslant s_1$, $0 \leqslant \theta \leqslant 1$. 假定

$$\frac{1}{q} = \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1}. \tag{1.8.1}$$

那么

$$\|u\|_{\dot{B}^s_{p,q}} \lesssim \|u\|^{1-\theta}_{\dot{B}^{s_0}_{p_0,q_0}} \|u\|^{\theta}_{\dot{B}^{s_1}_{p_1,q_1}} \tag{1.8.2}$$

成立的充要条件是

$$\frac{1}{p} - \frac{s}{n} = (1-\theta)\left(\frac{1}{p_0} - \frac{s_0}{n}\right) + \theta\left(\frac{1}{p_1} - \frac{s_1}{n}\right), \quad \theta(s_1 - s_0) \geqslant s - s_0. \tag{1.8.3}$$

$\dot{B}^s_{p,q}$ 和$\dot{B}^s_{p_i,q_i}$ 分别被$\dot{F}^s_{p,q}$ 和$\dot{F}^s_{p_i,q_i}$ 所取代, 结论仍成立.

证明. (充分性) 由条件(1.8.3),

$$\frac{1}{p} - \frac{1-\theta}{p_0} - \frac{\theta}{p_1} = \frac{s}{n} - (1-\theta)\frac{s_0}{n} - \theta\frac{s_1}{n} := -\eta \leqslant 0. \tag{1.8.4}$$

选取p^* 和s^* 满足

$$\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} + \eta, \quad s^* = s + n\theta.$$

使用凸性Hölder 不等式, 我们有

$$\|f\|_{\dot{B}^{s^*}_{p^*,q}} \lesssim \|f\|^{1-\theta}_{\dot{B}^{s_0}_{p_0,q_0}} \|f\|^{\theta}_{\dot{B}^{s_1}_{p_1,q_1}}. \tag{1.8.5}$$

使用包含关系$\dot{B}^{s^*}_{p^*,q} \subset \dot{B}^s_{p,q}$, 我们得到结论.

(必要性) 使用scaling,

$$\|f(\lambda\cdot)\|_{\dot{B}^s_{p,q}} = \lambda^{s-n/p}\|f\|_{\dot{B}^s_{p,q}}, \quad \lambda > 0.$$

因此, 如果(1.8.2) 成立, 我们有

$$\lambda^{s-n/p-[(1-\theta)(s_0-n/p_0)+\theta(s_1-n/p_1)]} \leqslant C.$$

令$\lambda\to 0$或$\lambda\to\infty$, 我们立即得到$s-n/p-[(1-\theta)(s_0-n/p_0)+\theta(s_1-n/p_1)=0$.

下面, 我们证明$s-s_0\leqslant\theta(s_1-s_0)$. 若不然, $s-s_0>\theta(s_1-s_0)$. 首先假设$s_0=0$. 不失一般性, 我们可假设$\text{supp}\,\varphi\subset\{\xi:1/2\leqslant|\xi|\leqslant 3/2\}$且对$3/4\leqslant|\xi|\leqslant 1$, $\varphi(\xi)=1$. 从而,

$$\varphi(2^{-j}\xi)=1,\quad 3\cdot 2^{j-2}\leqslant|\xi|\leqslant 2^j.$$

记

$$\rho_j(\xi)=\varphi(2(\xi-(7\cdot 2^{j-3},0,...,0))),\tag{1.8.6}$$

对充分小的$\varepsilon>0$, 记

$$\hat{f}(\xi)=\sum_{j=100}^{N}2^{\varepsilon j}\rho_j(\xi).\tag{1.8.7}$$

这导致

$$\|f\|^q_{\dot{B}^s_{p,q}}=\sum_{j=100}^{N}2^{(s+\varepsilon)qj}\|\mathscr{F}^{-1}(\varphi_j\rho_j)\|^q_p.$$

注意到$\varphi_j(\xi)=1$ 在ρ_j 的支集上成立, 我们有

$$\|\mathscr{F}^{-1}(\varphi_j\rho_j)\|_p=\|\mathscr{F}^{-1}\rho_j\|_p=\|\mathscr{F}^{-1}\rho_0\|_p.$$

从而,

$$\|f\|_{\dot{B}^s_{p,q}}\sim 2^{(s+\varepsilon)N}.$$

类似地,

$$\|f\|_{\dot{B}^0_{p_0,q_0}}\sim 2^{\varepsilon N},\quad \|f\|_{\dot{B}^{s_1}_{p_1,q_1}}\sim 2^{(s_1+\varepsilon)N}.$$

由(1.8.2), 我们得到$2^{(s+\varepsilon)N}<2^{\varepsilon N}2^{s_1\theta N}$. 但是如果$N$ 充分大, 这与$s>\theta s_1$ 矛盾. 用$s-s_0$ 取代s, 可以得到一般情形的证明. □

我们自然要问: 条件(1.8.1) 是否对(1.8.2) 也是必要的? 回答是否定的, 我们有下面的

命题1.8.2. 设$0<q<\infty$, $0<p_0,p_1,p\leqslant\infty$, $0<\theta<1$, $-\infty<s,s_0,s_1<\infty$. 那么

$$\|u\|_{\dot{B}^s_{p,q}}\lesssim\|u\|^{1-\theta}_{\dot{B}^{s_0}_{p_0,\infty}}\|u\|^{\theta}_{\dot{B}^{s_1}_{p_1,\infty}}\tag{1.8.8}$$

成立的充要条件是

$$\frac{1}{p}-\frac{s}{n}=(1-\theta)\left(\frac{1}{p_0}-\frac{s_0}{n}\right)+\theta\left(\frac{1}{p_1}-\frac{s_1}{n}\right), \tag{1.8.9}$$

$$s-\frac{n}{p}\neq s_0-\frac{n}{p_0}, \tag{1.8.10}$$

$$s\leqslant(1-\theta)s_0+\theta s_1. \tag{1.8.11}$$

证明. 我们不妨设$s_0=0$, 其余情况可以类似证明.

(充分性) 第一步, 我们考虑$p\geqslant p_0\vee p_1$ 的情况. 由定义,

$$\|u\|_{\dot B^s_{p,q}}=\left(\sum_{N\text{ dyadic}}N^{sq}\|\triangle_N u\|_p^q\right)^{\frac{1}{q}} \tag{1.8.12}$$

从(1.8.11) 可以看出

$$\theta\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{p_1}+\frac{s_1-s}{n}\right)=(1-\theta)\left(\frac{s}{n}+\frac{1}{p_0}-\frac{1}{p}\right). \tag{1.8.13}$$

因为$0<\theta<1$, 所以(1.8.11) 蕴含了$\left(\frac{n}{p}-\frac{n}{p_1}+s_1-s\right)\left(s+\frac{n}{p_0}-\frac{n}{p}\right)>0$.

情形1. 我们考虑

$$s_1-s+\frac{n}{p}-\frac{n}{p_1}>0,\quad s+\frac{n}{p_0}-\frac{n}{p}>0. \tag{1.8.14}$$

首先, 我们考察$q<1/2$, $q^{-1}\in\mathbb{N}$ 的情形. 为简明我们记$K:=q^{-1}$. 因此,

$$\begin{aligned}\|u\|^q_{\dot B^s_{p,q}}&\leqslant\sum_{N_1\geqslant\ldots\geqslant N_K}N_1^{sq}\ldots N_K^{sq}\|\triangle_{N_1}u\|_p^q\ldots\|\triangle_{N_K}u\|_p^q\\&=\sum_{N_1\geqslant\ldots\geqslant N_K}(N_1^s...N_K^s\|\triangle_{N_1}u\|_p...\|\triangle_{N_K}u\|_p)^{q^2}\\&\quad\times(N_1^s\ldots N_K^s\|\triangle_{N_1}u\|_p\ldots\|\triangle_{N_K}u\|_p)^{q(1-q)}.\end{aligned} \tag{1.8.15}$$

由Bernstein 不等式,

$$\|\triangle_N u\|_p\leqslant N^{\frac{n}{p_0}-\frac{n}{p}}\|\triangle_N u\|_{p_0}, \tag{1.8.16}$$

$$\|\triangle_N u\|_p\leqslant N^{\frac{n}{p_1}-\frac{n}{p}}\|\triangle_N u\|_{p_1}. \tag{1.8.17}$$

可以选取$a\in(0,1], k\geqslant 1$ 满足$\theta K=k-1+a$. 因此,

$\|\triangle_{N_1}u\|_p...\|\triangle_{N_K}u\|_p$

$$=(\|\triangle_{N_1}u\|_p...\|\triangle_{N_{k-1}}u\|_p\|\triangle_{N_k}u\|_p^a)(\|\triangle_{N_k}u\|_p^{1-a}\|\triangle_{N_{k+1}}u\|_p\ldots\|\triangle_{N_K}u\|_p)$$
$$\lesssim N_k^{(1-a)(\frac{n}{p_0}-\frac{n}{p})}N_{k+1}^{\frac{n}{p_0}-\frac{n}{p}}\ldots N_K^{\frac{n}{p_0}-\frac{n}{p}}\|\triangle_{N_k}u\|_{p_0}^{1-a}\|\triangle_{N_{k+1}}u\|_{p_0}\ldots\|\triangle_{N_K}u\|_{p_0}$$
$$\times N_1^{\frac{n}{p_1}-\frac{n}{p}}\ldots N_{k-1}^{\frac{n}{p_1}-\frac{n}{p}}N_k^{a(\frac{n}{p_1}-\frac{n}{p})}\|\triangle_{N_1}u\|_{p_1}\ldots\|\triangle_{N_{k-1}}u\|_{p_1}\|\triangle_{N_k}u\|_{p_1}^a. \tag{1.8.18}$$

将(1.8.18) 代入(1.8.15), 我们有

$$\|u\|_{\dot B^s_{p,q}}\lesssim\sum_{N_1\geqslant\ldots\geqslant N_K}(N_1^s\ldots N_K^s\|\triangle_{N_1}u\|_p\ldots\|\triangle_{N_K}u\|_p)^{q^2}$$
$$\times\Lambda(N_1,...,N_K)\|u\|_{\dot B^{s_1}_{p_1,\infty}}^{q(1-q)\theta K}\|u\|_{\dot B^0_{p_0,\infty}}^{(1-\theta)Kq(1-q)}. \tag{1.8.19}$$

其中

$$\Lambda(N_1,\ldots N_K)=\Big(N_1^{-\frac{n}{p}+\frac{n}{p_1}-s_1+s}\ldots N_{k-1}^{-\frac{n}{p}+\frac{n}{p_1}-s_1+s}N_k^{a(-\frac{n}{p}+\frac{n}{p_1})-s_1}$$
$$\times N_k^{(1-a)(-\frac{n}{p}+\frac{n}{p_0}+s)}N_{k+1}^{-\frac{n}{p}+\frac{n}{p_0}+s}\ldots N_K^{-\frac{n}{p}+\frac{n}{r}+s}\Big)^{q(1-q)}. \tag{1.8.20}$$

由(1.8.19) 我们有

$$\|u\|_{\dot B^s_{p,q}}\lesssim\sum_{N_1\geqslant\ldots\geqslant N_K}\Lambda(N_1,\ldots N_K)\sum_{i=1}^K(N_i^s\|\Delta_iu\|_p)^q \tag{1.8.21}$$
$$\times\|u\|_{\dot B^{s_1}_{p_1,\infty}}^{(1-q)\theta}\|u\|_{\dot B^0_{p_0,\infty}}^{(1-\theta)(1-q)}. \tag{1.8.22}$$

从而, 只要证明

$$\sum_{N_1\geqslant\ldots\geqslant N_K}\Lambda(N_1,\ldots N_K)\sum_{i=1}^K(N_i^s\|\Delta_iu\|_p)^q\lesssim\|u\|^q_{\dot B^s_{p,q}}. \tag{1.8.23}$$

事实上, (1.8.20)–(1.8.23) 蕴含所要的结果. 最后, 我们证明(1.8.23). 使用条件条件(1.8.14), 我们有下面的估计:

$$\sum_{N_1\geqslant\ldots\geqslant N_K}\Lambda(N_1,\ldots N_K)(N_k^s\|\Delta_ku\|_p)^q$$
$$\lesssim\sum_{N_{k-1}\geqslant N_k}\left(\frac{N_{k-1}}{N_k}\right)^{(k-1)(s-s_1+\frac{n}{p_1}-\frac{n}{p})q(1-q)}\|\Delta_kD^su\|_p^q$$
$$\lesssim\|u\|^q_{\dot B^s_{p,q}}. \tag{1.8.24}$$

情形 2. 考虑下面的情况:

$$s_1 - s + \frac{n}{p} - \frac{n}{p_1} < 0, \quad s + \frac{n}{p_0} - \frac{n}{p} < 0. \tag{1.8.25}$$

这种情况类似情形1, 我们只需要用求和次序$\sum_{N_1 \leqslant \ldots \leqslant N_K}$ 取代(1.8.15) 中的求和次序$\sum_{N_1 \geqslant \ldots \geqslant N_K}$, 然后重复如上证明即可, 详细证明省略.

第二步, 我们考虑$p < p_0 \vee p_1$ 的情况. 由于$\theta \in (0,1)$ 且$1/p \leqslant (1-\theta)/p_0 + \theta/p_1$, 易见$p_0 \neq p_1$ 且$p_0 \wedge p_1 < p < p_0 \vee p_1$. 设$0 < \varepsilon \ll 1$. 由第一步的结果,

$$\|f\|_{\dot{B}^s_{p,q}} \lesssim \|f\|^{1/2}_{\dot{B}^{s-\varepsilon}_{p,\infty}} \|f\|^{1/2}_{\dot{B}^{s+\varepsilon}_{p,\infty}}. \tag{1.8.26}$$

因为$s_0 - n/p_0 \neq s_1 - n/p_1$, 可设$s_0 - n/p_0 < s_1 - n/p_1$. 这导致$1/p - s/n \in (1/p_0 - s_0/n,\ 1/p_1 - s_1/n)$. 所以, 当$\varepsilon > 0$ 充分小,

$$\frac{1}{p} - \frac{s \pm \varepsilon}{n} \in \left(\frac{1}{p_0} - \frac{s_0}{n},\ \frac{1}{p_1} - \frac{s_1}{n}\right).$$

于是存在$\theta_\pm \in (0,1)$ 满足

$$\frac{1}{p} - \frac{s \pm \varepsilon}{n} = (1-\theta_\pm)\left(\frac{1}{p_0} - \frac{s_0}{n}\right) + \theta_\pm \left(\frac{1}{p_1} - \frac{s_1}{n}\right).$$

故由命题1.8.1, 我们得到

$$\|f\|_{\dot{B}^{s-\varepsilon}_{p,\infty}} \lesssim \|f\|^{1-\theta_-}_{\dot{B}^{s_0}_{p_0,\infty}} \|f\|^{\theta_-}_{\dot{B}^{s_1}_{p_1,\infty}}, \tag{1.8.27}$$

$$\|f\|_{\dot{B}^{s+\varepsilon}_{p,\infty}} \lesssim \|f\|^{1-\theta_+}_{\dot{B}^{s_0}_{p_0,\infty}} \|f\|^{\theta_+}_{\dot{B}^{s_1}_{p_1,\infty}}. \tag{1.8.28}$$

易见$\theta = (\theta_+ + \theta_-)/2$. 将(1.8.27) 和(1.8.28) 代入到(1.8.26), 我们得到结论.

(必要性) 只要证明$s_1 - n/p_1 \neq s_0 - n/p_0$. 若不然, 则有$s - n/p = s_0 - n/p_0 = s_1 - n/p_1$. 设

$$\hat{f}(\xi) = \sum_{j=100}^{N} 2^{(n/p-s)j} \varphi_j(\xi). \tag{1.8.29}$$

我们看到$\|f\|_{B^s_{p,q}} \sim N^{1/q}$, $\|f\|_{B^s_{p,\infty}} \sim 1$. 但是这与(1.8.8) 矛盾. □

§1.8.2 Triebel-Lizorkin 空间和分数阶Sobolev 空间情形

对Triebel 空间$\dot{F}^s_{p,q}$ 的情况, 我们有

命题1.8.3. 设$0<p,p_0,p_1,q<\infty$, $s,s_0,s_1\in\mathbb{R}$, $0<\theta<1$. 那么

$$\|u\|_{\dot F^s_{p,q}}\lesssim\|u\|^{1-\theta}_{\dot F^{s_0}_{p_0,\infty}}\|u\|^{\theta}_{\dot F^{s_1}_{p_1,\infty}} \tag{1.8.30}$$

成立的充要条件是

$$\frac{1}{p}-\frac{s}{n}=(1-\theta)\left(\frac{1}{p_0}-\frac{s_0}{n}\right)+\theta\left(\frac{1}{p_1}-\frac{s_1}{n}\right), \tag{1.8.31}$$

$$s\leqslant(1-\theta)s_0+\theta s_1, \tag{1.8.32}$$

$$\text{若 } s=(1-\theta)s_0+\theta s_1,\ \text{则 } s_0\neq s_1. \tag{1.8.33}$$

不等式(1.8.30)在凸性条件$s=(1-\theta)s_0+\theta s_1$, $\frac{1}{p}=\frac{1-\theta}{p_0}++\frac{\theta}{p_1}$ 下的充分性可见[125, 20]. 下面是分数阶导数情形下的GN 不等式:

推论1.8.4. 设$1<p,p_i<\infty$, $s,s_0,s_1\in\mathbb{R}$, $0\leqslant\theta\leqslant1$. 则

$$\|u\|_{\dot H^s_p}\lesssim\|u\|^{1-\theta}_{L^{p_0}}\|u\|^{\theta}_{\dot H^{s_1}_{p_1}} \tag{1.8.34}$$

成立的充要条件是

$$\frac{1}{p}-\frac{s}{n}=\frac{1-\theta}{p_0}+\theta\left(\frac{1}{p_1}-\frac{s_1}{n}\right),\quad s\leqslant\theta s_1. \tag{1.8.35}$$

命题1.8.3 的证明. (充分性) 首先考虑$s<(1-\theta)s_0+\theta s_1$ 的情形. 我们可以选取充分小的$\varepsilon>0$ 满足

$$s\leqslant(1-\theta)s_0^*+\theta s_1^*,\quad s_0^*:=s_0-\varepsilon,\ s_1^*:=s_1-\varepsilon.$$

因为$\varepsilon>0$ 充分小, 我们可以假设

$$\frac{1}{p_0^*}:=\frac{1}{p_0}-\frac{\varepsilon}{n}>0,\quad \frac{1}{p_1^*}:=\frac{1}{p_1}-\frac{\varepsilon}{n}>0.$$

因此,

$$\frac{1}{p}-\frac{s}{n}=(1-\theta)\left(\frac{1}{p_0^*}-\frac{s_0^*}{n}\right)+\theta\left(\frac{1}{p_1^*}-\frac{s_1^*}{n}\right). \tag{1.8.36}$$

这导致

$$\frac{1}{p}-\frac{1-\theta}{p_0^*}-\frac{\theta}{p_1^*}=\frac{s}{n}-(1-\theta)\frac{s_0^*}{n}-\theta\frac{s_1^*}{n}:=-\eta\leqslant0. \tag{1.8.37}$$

取

$$\frac{1}{p^*}=\frac{1}{p}+\eta, \quad s^*=s+n\eta, \tag{1.8.38}$$

我们看到

$$\frac{1}{p^*}=\frac{1-\theta}{p_0^*}+\frac{\theta}{p_1^*}, \quad s^*=(1-\theta)s_0^*+\theta s_1^*. \tag{1.8.39}$$

使用Hölder 不等式, 类似Besov 空间情形, 有

$$\|f\|_{\dot F^{s^*}_{p^*,q}} \lesssim \|f\|^{1-\theta}_{\dot F^{s_0^*}_{p_0^*,q}} \|f\|^{\theta}_{\dot F^{s_1^*}_{p_1^*,q}}.$$

由包含关系

$$\dot F^{s_0}_{p_0,\infty}\subset F^{s_0^*}_{p_0^*,q}, \quad \dot F^{s_1}_{p_1,\infty}\subset F^{s_1^*}_{p_1^*,q},$$

立即获得结论.

其次考虑$s=(1-\theta)s_0+\theta s_1$ 且$s_0\neq s_1$ 的情形. 使用引理 B.2.1,

$$\|2^{sj}\triangle_j f\|_{\ell^q}\lesssim \|2^{s_0 j}\triangle_j f\|^{1-\theta}_{\ell^\infty}\|2^{s_1 j}\triangle_j f\|^{\theta}_{\ell^\infty}.$$

再关于空间变量使用一次 Hölder 不等式, 我们便得到结论.

(必要性) 只需要考虑 $s=(1-\theta)s_0+\theta s_1$ 的情况. 如果 $s_0=s_1$, 则 $s=s_0=s_1$. 不失一般性, 设 ρ_j 由 (1.8.6) 定义, 记

$$\hat f(\xi)=\sum_{j=100}^{N} 2^{-sj}\rho_j(\xi). \tag{1.8.40}$$

这导致

$$\|f\|_{\dot F^s_{p,\infty}}=\|\mathscr{F}^{-1}(\rho_0)\|_p\sim 1.$$

但是,

$$\|f\|_{\dot F^s_{p,q}}\sim N^{1/q}$$

这与GN不等式矛盾. □

下面的插值引理在研究非线性Schrödinger方程的blowup 解的集中现象和defocusing 的H^1 临界情况下的散射算子的存在性起着重要作用. 这种想法可以追溯到Bourgain [12], 一般情形由作者[174] 给出, 它是上述结果的推论.

命题1.8.5. 假设$0 < p_0 < p < \infty$, $0 < r \leqslant \infty$, $-\infty < s_1 < s < s_0 < \infty$, $0 < \theta < 1$ 且

$$\frac{1}{p} = \frac{\theta}{p_0} + \frac{1-\theta}{\infty}, \qquad s = \theta s_0 + (1-\theta) s_1. \tag{1.8.41}$$

我们有

$$\|u\|_{\dot{F}^s_{p,r}(\mathbb{R}^n)} \leqslant C \|u\|^{1-\theta}_{\dot{B}^{s_1}_{\infty,\infty}(\mathbb{R}^n)} \|u\|^{\theta}_{\dot{B}^{s_0}_{p_0,p_0}(\mathbb{R}^n)}. \tag{1.8.42}$$

第二章　Navier-Stokes方程的局部、整体解

本章研究Navier-Stokes方程(NS方程)解的局部、整体适定性. 所谓适定性, 是指方程的解的存在唯一性, 继承性以及解对初始值的连续依赖性. 所谓继承性, 是指初值属于什么空间, 则得到的解在任意生存时间也属于相应的空间. 解对初值的连续依赖性是指若两个初始值相差很小, 则得到的解在任何生存时间里也相差很小. 所谓局部(整体)解, 是指解在某个有限时间区间(整个$\mathbb{R}$或$\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$)存在.

寻求非线性发展方程解的局部、整体适定性, 需要我们在解与生存空间中寻找一种平衡, 弱解、广义解生存的空间范围太大而难以得到唯一性; 光滑解依赖的空间又太小, 生存成了问题. 寻求解与空间的平衡, 又与方程自身的结构、算子、半群有千丝万缕的联系. 这也正是非线性发展方程的困难和魅力所在.

NS方程被公认为是流体力学领域的最基本的方程, 困扰人们多年的三维和三维以上空间的整体光滑解的存在性迄今一直没有解决.

§2.1　引言

§2.1.1　模型、能量结构

关于NS方程, 二维空间的整体光滑解是由Ladyzhenskaya [102] 首先用能量方法得到的, 之后Kato [71] 用半群方法结合热半群的衰减估计得到一个新的证明. Kato 也证明了高维空间NS方程在 L^n 的局部解适定性. 本书基于线性抛物方程的解的时间–空间混合估计给出 L^n 解的局部适定性的更简单的证明, 是由本书第一作者给出的. 二维空间中使用能量守恒, 便可以得到整体适定性. 但遗憾的是, 在三维和三维以上空间中, 由于 L^n 是NS方程的临界空间, 仅用现在已知的能量估计无法控制解的 L^n 范数, 整体解的适定性无法得到. 本章的方法当然也适用于其他抛物型的半线性方程, 如Ginzburg-Landau方程, 热方程等.

不可压的NS方程模型如下:

$$u_t - \Delta u + (u \cdot \nabla)u + \nabla p = 0, \quad \operatorname{div} u = 0, \quad u(0, x) = u_0(x), \tag{2.1.1}$$

其中 $\Delta = \sum_{i=1}^n \partial_{x_i}^2$, $\nabla = (\partial_{x_1}, ..., \partial_{x_n})$, $\operatorname{div} u = \partial_{x_1} u_1 + ... + \partial_{x_n} u_n$, $u = (u_1, ..., u_n)$ 和 p 为 $(t, x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n$ 的实未知函数, $u_0 = (u_0^1, ..., u_0^n)$ 表示 u 在时间 $t = 0$ 处的初始函数.

由方程的自身结构, 我们容易推出(2.1.1)的光滑解在形式上满足下面的守恒律:

$$\frac{1}{2}\|u(t)\|_2^2+\int_0^t \|\nabla u(s)\|_2^2 ds=\frac{1}{2}\|u_0\|_2^2, \tag{2.1.2}$$

其中 $\|u\|_2^2 := \sum_{i=1}^n \|u_i\|_2^2$, $u=(u_1,...,u_n)$. 按照上面的守恒律, 我们很自然要关心解在 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 中的适定性, 尤其是整体适定性.

使用紧性方法, 容易得到(2.1.1)在任意维空间的弱解的存在性, 但是对高维空间 $n\geqslant 3$, 弱解的唯一性、对初值的连续依赖性难以用紧性方法得到; 见[106].

§2.1.2 NS方程的变形

设 u,p 是NS方程的光滑解. 在形式上对NS方程的第一个方程求 div, 注意到第二个方程 $\operatorname{div} u=0$, 我们立即得到

$$\Delta p+\operatorname{div}\,[(u\cdot\nabla)u]=0. \tag{2.1.3}$$

得到 $p=(-\Delta)^{-1}\nabla\,\operatorname{div}[(u\cdot\nabla)u]$. 为了记述简单, 我们再记

$$\mathbb{P}=I+(-\Delta)^{-1}\nabla\operatorname{div}. \tag{2.1.4}$$

将 p 从(2.1.3)中解出然后代回到(2.1.1)的第一个方程, 我们得到

$$u_t-\Delta u+\mathbb{P}\,[(u\cdot\nabla)u]=0,\quad u(0,x)=u_0(x). \tag{2.1.5}$$

于是, NS方程被化成抛物类方程.

§2.1.3 临界空间

如果 u 是(2.1.5)的光滑解, 则 $u_\lambda=\lambda u(\lambda^2 t,\lambda x)$ $(\forall\,\lambda>0)$ 也是NS方程的光滑解, 初始值为 $u_\lambda(0,x)=\lambda u_0(\lambda x)$. 注意到

$$\|u_\lambda(0,\cdot)\|_{L^r(\mathbb{R}^n)}=\lambda\|u_0(\lambda\,\cdot)\|_{L^r(\mathbb{R}^n)}=\lambda^{1-n/r}\|u_0\|_{L^r(\mathbb{R}^n)}, \tag{2.1.6}$$

我们知道 $r=n$ 恰好满足对任何 $\lambda>0$, $u_\lambda(0,x)$ 的 $L^r(\mathbb{R}^n)$ 范数保持不变. 从这种角度看, 我们称 L^n 是NS方程在所有 L^r 空间类中的临界空间.

我们也可以算出 $\dot H^{n/2-1}(\mathbb{R}^n)$ 是使得 $u_\lambda(0,x)$ 的所有 $\dot H^s(\mathbb{R}^n)$ 范数保持不变的唯一空间类. 我们也称 $\dot H^{n/2-1}$为NS方程在所有 $\dot H^s$ 空间类中的临界空间. 从另一方面讲, 注意到 $\dot H^{n/2-1}\subset L^n$ 为最优嵌入, 也不难理解 $\dot H^{n/2-1}$ 为临界空间.

§2.2 热半群的时空估计

§2.2.1 热半群的空间$L^r \to L^p$估计

记$H(t) = e^{t\Delta} = \mathscr{F}^{-1}e^{-t|\xi|^2}\mathscr{F}$. 由于$e^{-t|\xi|^2}$为指数衰减函数, 这对应物理上的耗散现象, 决定了$H(t)$有非常好的性质. 作为本节的开始, 我们有下面的$L^r \to L^p$估计, 这一估计来历已久, 可见[134].

命题2.2.1. 设$1 \leqslant r \leqslant p \leqslant \infty$. 则有如下估计

$$\|\nabla^k H(t)f\|_p \lesssim t^{-\frac{k}{2}-\frac{n}{2}(\frac{1}{r}-\frac{1}{p})}\|f\|_r, \quad k=0,1, \ t>0. \tag{2.2.1}$$

证明. 首先, 我们证明$H(t): L^r \to L^r$. 使用Young不等式,

$$\|H(t)f\|_r \leqslant \|\mathscr{F}^{-1}e^{-t|\xi|^2}\|_1\|f\|_r \lesssim \|f\|_r. \tag{2.2.2}$$

其次, 我们估计$\|H(t)\|_{L^r\to L^\infty}$. 仍使用Young不等式,

$$\|H(t)f\|_\infty \leqslant \|\mathscr{F}^{-1}e^{-t|\xi|^2}\|_{r'}\|f\|_r \lesssim t^{-\frac{n}{2r}}\|f\|_r. \tag{2.2.3}$$

现在对任何$p \geqslant r$, 先使用Hölder不等式, 再使用(2.2.2), (2.2.3), 有

$$\|H(t)f\|_p \leqslant \|H(t)f\|_\infty^{1-r/p}\|H(t)f\|_r^{r/p} \lesssim t^{-\frac{n}{2}(\frac{1}{r}-\frac{1}{p})}\|f\|_r. \tag{2.2.4}$$

下面我们来估计$\|\partial_{x_1}H(t)f\|_r$. 还是使用Young不等式, 有

$$\|\partial_{x_1}H(t)f\|_r \leqslant \|\mathscr{F}^{-1}(\xi_1 e^{-t|\xi|^2})\|_1\|f\|_r \lesssim t^{-\frac{1}{2}}\|f\|_r. \tag{2.2.5}$$

于是

$$\|\nabla H(t)f\|_r \lesssim t^{-\frac{1}{2}}\|f\|_r. \tag{2.2.6}$$

综合(2.2.4)和(2.2.6), 我们立即有

$$\begin{aligned}\|\nabla H(t)f\|_p = \|H(t/2)\nabla H(t/2)f\|_p &\lesssim t^{-\frac{n}{2}(\frac{1}{r}-\frac{1}{p})}\|\nabla H(t/2)f\|_r \\ &\lesssim t^{-\frac{1}{2}-\frac{n}{2}(\frac{1}{r}-\frac{1}{p})}\|f\|_r.\end{aligned} \tag{2.2.7}$$

这正是我们想要的结果. □

作为推广, 我们还可以证明, 对任何$s \geqslant 0$, $1 < r \leqslant p \leqslant \infty$,

$$\|(-\Delta)^{s/2}H(t)f\|_p \lesssim t^{-\frac{s}{2}-\frac{n}{2}(\frac{1}{r}-\frac{1}{p})}\|f\|_r. \tag{2.2.8}$$

§2.2.2　热半群的时空混合估计

这一部分我们使用二进制分解研究热半群的估计, 关于热半群, 最早使用二进制分解的想法起始于Chemin [24], 下面的结果属于[173].

命题2.2.2. 设$a \geqslant 0$, $1 \leqslant r \leqslant p \leqslant \infty$, $0 < \lambda \leqslant \infty$, $2/\gamma = a + n(1/r - 1/p)$. 那么我们有

$$\|H(t)f\|_{L^\gamma(\mathbb{R}_+;\dot{B}^0_{p,\lambda})} \leqslant C\|f\|_{\dot{B}^{-a}_{r,\lambda\wedge\gamma}}. \tag{2.2.9}$$

证明. 注意到$e^{-t|\xi|^2}$为指数衰减函数, 为了充分利用这一性质, 我们使用二进制分解算子. 我们有

$$\|\triangle_j H(t)f\|_r \leqslant \|\varphi_j e^{-t|\xi|^2}\|_{M_r}\|f\|_r. \tag{2.2.10}$$

使用乘子的基本性质, 注意$\varphi_j = \varphi(2^{-j}\xi)$, $\mathrm{supp}\varphi \subset \{\xi : 1/2 \leqslant |\xi| \leqslant 2\}$, 我们有

$$\|\varphi_j e^{-t|\xi|^2}\|_{M_r} = \|\varphi e^{-t2^{2j}|\xi|^2}\|_{M_r} \leqslant \|\varphi e^{-t2^{2j}|\xi|^2}\|_{H^L}, \tag{2.2.11}$$

其中$L > n/2$. 使用$\sup_{x>0} x^k/e^x \leqslant C$, 容易计算

$$\|\varphi e^{-t2^{2j}|\xi|^2}\|_{H^L} \lesssim e^{-ct2^{2j}}. \tag{2.2.12}$$

于是, 由(2.2.10)–(2.2.12)我们得到

$$\|\triangle_j H(t)f\|_r \lesssim e^{-ct2^{2j}}\|f\|_r. \tag{2.2.13}$$

由于$\triangle_j = \triangle_j(\sum_{\ell=0,\pm1}\triangle_{j+\ell})$, (2.2.13)蕴含

$$\|\triangle_j H(t)f\|_r \lesssim e^{-ct2^{2j}}\|\triangle_j f\|_r. \tag{2.2.14}$$

(2.2.14)两端求ℓ^λ范数,

$$\|H(t)f\|_{\dot{B}^0_{r,\lambda}} \lesssim \left(\sum_j e^{-ct2^{2j}}\|\triangle_j f\|_r^\lambda\right)^{1/\lambda}. \tag{2.2.15}$$

下面分成两种情况讨论. 第一种情况为$\gamma \geqslant \lambda$. (2.2.15)两端求$L^\gamma_t(\mathbb{R}_+)$ 范数, 再使用Minkowski 不等式, 有

$$\|H(t)f\|_{L^\gamma(\mathbb{R}_+,\dot{B}^0_{r,\lambda})} \lesssim \left\|\sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-ct\lambda 2^{2k}}\|\triangle_k f\|_r^\lambda\right\|_{L_t^{\gamma/\lambda}}^{1/\lambda}$$

$$\lesssim \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} \left\| e^{-ct\lambda 2^{2k}} \right\|_{L_t^{\gamma/\lambda}} \|\triangle_k f\|_r^\lambda \right)^{1/\lambda}. \tag{2.2.16}$$

注意

$$\left\| e^{-ct\lambda 2^{2k}} \right\|_{L_t^{\gamma/\lambda}} \lesssim 2^{-\lambda 2k/\gamma}, \tag{2.2.17}$$

我们从(2.2.16)和(2.2.17)得到$p = r$且$\gamma \geqslant \lambda$时结论的证明. 当$r < p$时, 使用嵌入$\dot{B}^{-2/\gamma+n(1/r-1/p)}_{r,\lambda} \subset \dot{B}^{-2/\gamma}_{p,\lambda}$即可得到结论.

第二种情况为$\gamma < \lambda$. 由(2.2.15),

$$\int_{\mathbb{R}_+} \|H(t)f\|^\gamma_{\dot{B}^0_{p,\lambda}} dt \lesssim \sum_j 2^{-2j} \|\triangle_j f\|_p^\gamma. \tag{2.2.18}$$

从而得到$p = r$且$\gamma < \lambda$时结论的证明. 当$r < p$时, 同第一种情况. □

事实上, 上述估计(2.2.8), (2.2.9) 可以发展到$0 < r \leqslant p \leqslant \infty$, 注意$\lambda, \gamma > 0$均没有任何限制, 这多少令人有些惊讶, 详细可见[173]. 与(2.2.9) 有关的早期结果属于Weissler [180], Giga [42], 他们的证明技巧是使用Marcinkiewicz 插值定理. 下面是上述命题的重要推论:

推论2.2.3. 记$2/\gamma(p) = n(1/2 - 1/p)$. 对任何$2 \leqslant p < \infty$, 我们有

$$\|\nabla H(t)f\|_{L^2(\mathbb{R}_+;L^2)} \lesssim \|f\|_{L^2}, \tag{2.2.19}$$

$$\|H(t)f\|_{L^{\gamma(p)}(\mathbb{R}_+;L^p)} \lesssim \|f\|_{L^2}. \tag{2.2.20}$$

证明. 上述命题中取$\lambda = r = 2$, 使用$\dot{B}^0_{p,2} \subset L^p$, 即可得到结论. □

为了简化叙述, 我们记

$$(\mathscr{A} f)(t,x) := \int_0^t H(t-\tau) f(\tau, x) d\tau. \tag{2.2.21}$$

下面推导$\mathscr{A} f$的空时估计. 由命题2.2.1,

$$\|\nabla^k \mathscr{A} f\|_p \lesssim \int_0^t (t-\tau)^{-\frac{k}{2} - \frac{n}{2}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{p}\right)} \|f(\tau)\|_r \, d\tau, \quad k = 0, 1. \tag{2.2.22}$$

使用Hardy-Littlewood-Sobolev不等式, 我们立即有

命题2.2.4. 设$1 \leqslant r \leqslant p \leqslant \infty$, $1 < \gamma, \gamma_1 < \infty$ 满足

$$\frac{1}{\gamma} = \frac{1}{\gamma_1} + \frac{k}{2} + \frac{n}{2}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{p}\right) - 1, \quad \frac{k}{2} + \frac{n}{2}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{p}\right) < 1, \quad k = 0, 1. \tag{2.2.23}$$

那么我们有

$$\|\nabla^k \mathscr{A} f\|_{L^\gamma(\mathbb{R}_+;L^p)} \lesssim \|f\|_{L^{\gamma_1}(\mathbb{R}_+;L^r)}. \tag{2.2.24}$$

命题2.2.4未能处理$\gamma = \infty$ 的情形, 此时我们有(见[173])

命题2.2.5. 设$1 \leqslant r \leqslant \infty$, $1 \leqslant q' \leqslant \lambda \leqslant \infty$. 则有

$$\|\mathscr{A} f\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+,\dot{B}^0_{r,\lambda})} \lesssim \|f\|_{L^{q'}(\mathbb{R}_+,\dot{B}^{-2/q}_{r,\lambda})}. \tag{2.2.25}$$

证明. 先使用(2.2.14), 再使用Young不等式,

$$\begin{aligned}\|\triangle_k \mathscr{A} f\|_r &\lesssim \int_0^t e^{-c(t-\tau)2^{2k}} \|\triangle_k f(\tau)\|_r d\tau \\ &\lesssim 2^{-2k/q} \|\triangle_k f\|_{L^{q'}(\mathbb{R}_+,L^r)}.\end{aligned} \tag{2.2.26}$$

(2.2.26)两端求ℓ^λ 范数, 然后使用Minkowski不等式,

$$\begin{aligned}\|\mathscr{A} f\|_{\dot{B}^0_{r,\lambda}} &\lesssim \left\{ \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(2^{-2k/q} \|\triangle_k f\|_{L^{q'}(\mathbb{R}_+,L^r)} \right)^\lambda \right\}^{1/\lambda} \\ &\lesssim \|f\|_{L^{q'}(\mathbb{R}_+,\dot{B}^{-2/q}_{r,\lambda})}.\end{aligned} \tag{2.2.27}$$

这蕴含所要的结果. □

推论2.2.6. 记$2/\gamma(p) = n(1/2 - 1/p)$. 对任何$2 \leqslant p < \infty$, $2/\gamma(p) < 1$, 我们有

$$\|\nabla \mathscr{A} f\|_{L^2(\mathbb{R}_+;L^2)} \lesssim \|f\|_{L^{\gamma(p)'}(\mathbb{R}_+,L^{p'})}, \tag{2.2.28}$$

$$\|\mathscr{A} f\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+,L^2) \cap L^{\gamma(p)}(\mathbb{R}_+;L^p)} \lesssim \|f\|_{L^{\gamma(p)'}(\mathbb{R}_+,L^{p'})}. \tag{2.2.29}$$

一件显然的事情是, 本节所有的空时估计中, 将时间区间$\mathbb{R}_+$替换成有限时间区间, 比如$[0, T]$, 结论仍然成立.

§2.3 二维NS方程在L^2中的整体适定性

首先我们交待一下关于空间的记号, 对$u = (u_1, ..., u_n)$, 记$\|u\|_X^2 = \sum_{i=1}^n \|u_i\|_X^2$, $\|\nabla u\|_X^2 = \sum_{i,j=1}^n \|\partial_{x_i} u_j\|_X^2$. 用$L^q(I, X^n)$ 表示定义在I 取值于X^n 且满足

$$\|u\|_{L^q(I,[X]^n)} = \left(\int_I \|u(t)\|_X^q dt \right)^{1/q} < \infty \tag{2.3.1}$$

的函数$u(t) = (u_1(t), ..., u_n(t))$ 构成的空间类. 若无混淆, 简记$L^q(I, X) := L^q(I, X)$. 又记

$$[X]_0^n = \{u \in \mathscr{S}^n : \operatorname{div} u = 0\} \text{ 在}X^n\text{中的完备化},$$

然后用$L^q(I, [X]_0^n)$ 表示定义在I 取值于$[X]_0^n$ 且满足(2.3.1) 的函数$u(t) = (u_1(t), ..., u_n(t))$ 全体.

在推论2.2.3和推论(2.2.6)中取$n = 2$, $p = 4$, 我们立即得到

$$\|\nabla H(t)f\|_{L^2(0,T;\ L^2)} \lesssim \|f\|_{L^2}, \tag{2.3.2}$$

$$\|H(t)f\|_{L^4(0,T;\ L^4)} \lesssim \|f\|_{L^2}. \tag{2.3.3}$$

$$\|\nabla \mathscr{A} f\|_{L^2(0,T;\ L^2)} \lesssim \|f\|_{L^{4/3}(0,T;\ L^{4/3})}, \tag{2.3.4}$$

$$\|\mathscr{A} f\|_{L^\infty(0,T;\ L^2)\cap L^4(0,T;\ L^4)} \lesssim \|f\|_{L^{4/3}(0,T;\ L^{4/3})}. \tag{2.3.5}$$

为了记述简单, 我们又记$L^p_{x,t\in[0,T]} = L^p(0, T;\ L^p)$. 定义度量空间如下:

$$\mathfrak{D} = \left\{u : \|u\|_{L^4_{x,t\in[0,T]}} + \|\nabla u\|_{L^2_{x,t\in[0,T]}} \leqslant M\right\}, \tag{2.3.6}$$

$$d(u, v) = \|u - v\|_{L^4_{x,t\in[0,T]}} + \|\nabla(u - v)\|_{L^2_{x,t\in[0,T]}}. \tag{2.3.7}$$

假设$u_0 \in [L^2]_0^2 := \{u \in \mathscr{S} \times \mathscr{S} : \operatorname{div} u = 0\}$在$L^2 \times L^2$中的闭包. 我们考虑映射:

$$\mathfrak{M} : u(t) \to H(t)u_0 + \mathscr{A}\mathbb{P}[(u \cdot \nabla)u], \tag{2.3.8}$$

现在固定$M > 0$满足$CM \leqslant 1/2$, 其中C是下面各式中出现的最大常数. 我们证明$\mathfrak{M} : (\mathfrak{D}, d) \to (\mathfrak{D}, d)$ 为压缩映射. 事实上, 对任何$u \in \mathfrak{D}$,

$$\|\mathfrak{M}u\|_{L^4_{x,t\in[0,T]}} \leqslant \|H(t)u_0\|_{L^4_{x,t\in[0,T]}} + C\|\mathbb{P}[(u \cdot \nabla)u]\|_{L^{4/3}_{x,t\in[0,T]}}, \tag{2.3.9}$$

$$\|\nabla\mathfrak{M}u\|_{L^2_{x,t\in[0,T]}} \leqslant \|\nabla H(t)u_0\|_{L^2_{x,t\in[0,T]}} + C\|\mathbb{P}[(u \cdot \nabla)u]\|_{L^{4/3}_{x,t\in[0,T]}}. \tag{2.3.10}$$

使用Mihlin 乘子定理, $\mathbb{P} : L^{4/3} \to L^{4/3}$. 从而, 由Hölder 不等式,

$$\|\mathbb{P}[(u \cdot \nabla)u]\|_{L^{4/3}_{x,t\in[0,T]}} \leqslant \|u\|_{L^4_{x,t\in[0,T]}}\|\nabla u\|_{L^2_{x,t\in[0,T]}} \leqslant M^2. \tag{2.3.11}$$

又由(2.3.2), (2.3.3) 以及Lebesgue积分的绝对连续性, 存在T,

$$\|\nabla H(t)u_0\|_{L^2(0,T;\ L^2)} + \|H(t)u_0\|_{L^4(0,T;\ L^4)} \leqslant M/2. \tag{2.3.12}$$

于是,

$$\|\mathfrak{M}u\|_{L^4_{x,t\in[0,T]}} \leqslant M/2 + CM^2 \leqslant M, \tag{2.3.13}$$

$$\|\nabla\mathfrak{M}u\|_{L^2_{x,t\in[0,T]}} \leqslant M/2 + CM^2 \leqslant M. \tag{2.3.14}$$

同理可证

$$d(\mathfrak{M}u,\ \mathfrak{M}v) \leqslant \frac{1}{2}d(u,v). \tag{2.3.15}$$

从而存在$u \in \mathfrak{D}$ 满足积分方程

$$u(t) = H(t)u_0 + \mathscr{A}\mathbb{P}[(u\cdot\nabla)u]. \tag{2.3.16}$$

由$u_0 \in [L^2]^2_0$ 且$\operatorname{div}\mathbb{P} = 0$, 我们可以由积分方程直接得到$\operatorname{div} u = 0$ (缓和分布导数意义下). 再次使用(2.3.5), 知道$u \in C(0,T;\ [L^2]^2_0)$. 由标准的抛物方程的正则性理论[1], 我们知道这样的解是在$(0,T)\times\mathbb{R}^2$ 中无穷次光滑的. 所以, 自然有能量守恒等式(2.1.2). 即有$\|u(T)\|_2 \leqslant \|u_0\|_2$. 按照标准的半群理论, 我们可以延拓上面的解, 最后得到解的最大时间T_m, 我们需要说明$T_m = \infty$. 若不然, $T_m < \infty$. 由已知能量估计,

$$\frac{1}{2}\|u(t)\|_2^2 + \int_0^t \|\nabla u(s)\|_2^2 ds = \frac{1}{2}\|u_0\|_2^2, \quad \forall\ t < T_m. \tag{2.3.17}$$

由Gagliardo-Nirenberg 不等式,

$$\|u\|_{L^4_{x,t\in[0,T]}} \leqslant \|u\|^{1/2}_{L^\infty(0,T;\ L^2)}\|\nabla u\|^{1/2}_{L^2(0,T;\ L^2)} \lesssim \|u_0\|_2, \quad \forall\ T < T_m. \tag{2.3.18}$$

由此易证得到的解在$C([0,T_m);\ L^2)$一致连续. 这样, 得到的解可以延拓到T_m之外, 与T_m 极大矛盾. 容易验证, $[L^p]^2_0 = \{u \in L^p \times L^p : \operatorname{div} u = 0\}$, 此处div 是在缓和分布意义下. 我们证明了

定理 2.3.1. 设$u_0 \in [L^2]^2_0$. 那么NS方程(2.1.5)有唯一解u满足

$$u \in C(0,\infty;\ [L^2]^2_0)\ \cap\ L^2(0,\infty;\ [\dot{H}^1]^2_0), \tag{2.3.19}$$

以及

$$\frac{1}{2}\|u(t)\|_2^2 + \frac{1}{2}\int_0^t \|\nabla u(s)\|_2^2 ds = \frac{1}{2}\|u_0\|_2^2, \quad 0 < t < \infty. \tag{2.3.20}$$

[1] 见本章后面的进一步讨论.

由半群和压缩映像方法得到的解自然是适定的. 顺便指出, 定理2.3.1 的证明方法是具有一般性的, 可以很容易发展到其他抛物类方程, 例如

$$u_t - \Delta u + |\nabla u| u = 0, \quad u(0,x) = u_0(x)$$

在$L^2(\mathbb{R}^2)$ 中整体适定. 再如Hamilton–Jacobi 方程

$$u_t - \Delta u + |\nabla u|^{3/2} = 0, \quad u(0,x) = u_0(x)$$

在$L^2(\mathbb{R}^2)$ 中局部适定.

§2.4 多维NS方程在L^n中的适定性

为了记述简单, 我们仍记$L^p_{x,t\in[0,T]} = L^p(0,T;\ L^p(\mathbb{R}^n))$ 并采用上一节的的范数记号. 根据推论2.2.3 和2.2.6, 对$n \geqslant 3$, 我们有

$$\|\nabla H(t) f\|_{L^2(0,T;\, L^2)} \lesssim \|f\|_{L^2}, \tag{2.4.1}$$

$$\|H(t) f\|_{L^{2+4/n}_{x,t\in[0,T]}} \lesssim \|f\|_{L^2}. \tag{2.4.2}$$

$$\|\nabla \mathscr{A} f\|_{L^2(0,T;\ L^2)} \lesssim \|f\|_{L^{(2+4/n)'}_{x,t\in[0,T]}}, \tag{2.4.3}$$

$$\|\mathscr{A} f\|_{L^\infty(0,T;\ L^2)\cap L^{2+4/n}_{x,t\in[0,T]}} \lesssim \|f\|_{L^{(2+4/n)'}_{x,t\in[0,T]}}. \tag{2.4.4}$$

我们很想套用上一节的技巧, 但是很不幸的是,

$$\|(u\cdot\nabla)u\|_{L^{(2+4/n)'}_{x,t\in[0,T]}} \leqslant \|\nabla u\|_{L^2_{x,t\in[0,T]}} \|u\|_{L^{n+2}_{x,t\in[0,T]}}. \tag{2.4.5}$$

此时, 上面的线性估计不包含在$L^{n+2}_{x,t\in[0,T]}$ 中的控制, 所以, 我们还需要

推论2.4.1. 我们有下面的估计

$$\|H(t)u_0\|_{L^{n+2}_{x,t\in[0,T]}} \lesssim \|u_0\|_n, \tag{2.4.6}$$

$$\|H(t)u_0\|_{L^\infty(0,T;\ L^n)} \lesssim \|u_0\|_n. \tag{2.4.7}$$

$$\|\nabla \mathscr{A} f\|_{L^{n+2}_{x,t\in[0,T]}} \lesssim \|f\|_{L^{(n+2)/2}_{x,t\in[0,T]}}, \tag{2.4.8}$$

$$\|\nabla \mathscr{A} f\|_{L^\infty(0,T;\ L^n)} \lesssim \|f\|_{L^{(2+n)/2}_{x,t\in[0,T]}}. \tag{2.4.9}$$

证明. 在命题2.2.2 中取定$p = r = \lambda = n$, $\gamma = 2+n$, 得到

$$\|H(t)u_0\|_{L^{2+n}(\mathbb{R}_+;\dot{B}^{2/(2+n)}_{n,n})} \lesssim \|u_0\|_{\dot{B}^0_{n,\,n}} \lesssim \|u_0\|_n. \tag{2.4.10}$$

使用嵌入关系$\dot{B}^{2/(2+n)}_{n,n} \subset \dot{F}^{2/(2+n)}_{n,n} \subset \dot{F}^0_{n+2,2} = L^{n+2}$, 我们知道(2.4.10) 蕴含(2.4.6). (2.4.7) 是显然的.

(2.4.8) 直接可由命题2.2.4 推出. 命题2.2.5 中取$r = \lambda = (n+2)/2$, $q' = (n+2)/2$, 得到

$$\|\mathscr{A} f\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+;\,\dot{B}^{2n/(2+n)}_{(n+2)/2,\,(n+2)/2})} \lesssim \|f\|_{L^{(n+2)/2}(\mathbb{R}_+;\,\dot{B}^0_{(n+2)/2,\,(n+2)/2})}. \tag{2.4.11}$$

这蕴含

$$\|\nabla \mathscr{A} f\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+;\,\dot{B}^{(n-2)/(2+n)}_{(n+2)/2,\,(n+2)/2})} \lesssim \|f\|_{L^{(n+2)/2}_{x,t\in\mathbb{R}_+}}. \tag{2.4.12}$$

使用嵌入关系$\dot{B}^{(n-2)/(2+n)}_{(n+2)/2,\,(n+2)/2} = \dot{F}^{(n-2)/(2+n)}_{(n+2)/2,\,(n+2)/2} \subset \dot{F}^0_{n,2} = L^n$, 我们知道(2.4.12) 蕴含(2.4.9). □

上面的线性估计足以推出L^n 中的局部适定性和小初值时的整体适定性. 我们使用与$n=2$ 时平行的记号$[X]^n_0$. 我们有下面的

定理 2.4.2. *设$u_0 \in [L^n]^n_0$. 那么存在$T_m > 0$, 使得NS方程(2.1.5)有唯一解u满足*

$$u \in C([0,T_m);\ [L^n]^n_0)\ \cap\ L^{2+n}_{\rm loc}(0,T_m;\ [L^{2+n}]^n_0). \tag{2.4.13}$$

如果$T_m < \infty$, 则有$\|u\|_{L^{2+n}(0,T_m;\ L^{2+n})} = \infty$. 如果$\|u_0\|_n$ 充分小, 则$T_m = \infty$. 进一步, 若$u_0 \in [L^2]^n_0$, 那么还有$u \in C(0,T_m;[L^2]^n_0)$, $\partial_{x_i} u \in L^2(0,T_m;\ [L^2]^n_0)$, 以及

$$\frac{1}{2}\|u(t)\|_2^2 + \int_0^t \|\nabla u(s)\|_2^2 ds = \frac{1}{2}\|u_0\|_2^2, \quad 0<t<T_m. \tag{2.4.14}$$

证明. 定义度量空间如下:

$$\mathfrak{D} = \left\{ u : \|u\|_{L^{2+n}_{x,t\in[0,T]}} \leqslant \delta,\ \|u\|_{L^\infty([0,T];L^n)} \leqslant 2C\|u_0\|_n \right\}, \tag{2.4.15}$$

$$d(u,v) = \|u-v\|_{L^{2+n}_{x,t\in[0,T]}}. \tag{2.4.16}$$

我们考虑映射:

$$\mathfrak{M} : u(t) \to H(t)u_0 + \mathscr{A}\mathbb{P}\,{\rm div}\,(u\otimes u), \tag{2.4.17}$$

由推论2.4.2, 我们有

$$\begin{aligned}
\|\mathfrak{M}u\|_{L^{2+n}_{x,t\in[0,T]}} &\lesssim \|H(t)u_0\|_{L^{2+n}_{x,t\in[0,T]}} + \|u\otimes u\|_{L^{(2+n)/2}_{x,t\in[0,T]}} \\
&\lesssim \|H(t)u_0\|_{L^{2+n}_{x,t\in[0,T]}} + \|u\|^2_{L^{2+n}_{x,t\in[0,T]}} \\
&\lesssim \|H(t)u_0\|_{L^{2+n}_{x,t\in[0,T]}} + \delta^2, \qquad (2.4.18)\\
\|\mathfrak{M}u\|_{L^\infty(0,T;\ L^n)} &\lesssim \|u_0\|_n + \|u\otimes u\|_{L^{(2+n)/2}_{x,t\in[0,T]}} \\
&\lesssim \|u_0\|_n + \delta^2. \qquad (2.4.19)
\end{aligned}$$

使用标准的方法, 如果$C\delta \leqslant 1/4$, 我们可以证明$\mathfrak{M}$ 是从$\mathfrak{D}$ 到自身的压缩映射, 从而存在u 满足积分方程

$$u(t) = H(t)u_0 + \mathscr{A}\mathbb{P}\nabla\cdot(u\otimes u). \qquad (2.4.20)$$

使用标准的技术, 我们知道, 此解在$L^{2+n}(0,T;\ L^{2+n})$ 中唯一. 按照半群的一般理论, 我们可以延拓得到的解, 最后发现一个最大时间T_m, 使得解u 满足$u\in C([0,T_m);\ [L^n]^n_0)\cap L^{2+n}_{\rm loc}(0,T_m;\ [L^{2+n}]^n_0)$.

如果$u_0\in[L^2]^n_0$, 则我们可以使用(2.4.1)–(2.4.5), 类似二维情形, 知道$u\in C(0,T;\ [L^2]^n_0)$, $\partial_{x_i}u\in L^2(0,T;[L^2]^n_0)$. 由标准的抛物方程的正则性理论, 我们知道这样的解是在$(0,T)\times\mathbb{R}^n$ 中无穷次光滑的. 所以, 自然有能量守恒等式(2.1.2). 当$\|u_0\|_n$很小的时候, 我们可以直接在构造的度量空间中取$T=\infty$, 可以证明相应的结果. □

§2.5 NS方程解的正则性

本节我们来证明, 当时间$t>0$, 上面得到的NS方程的解实际上是无穷次光滑解, 更进一步, NS方程的解当时间$t>0$时是实解析解.

§2.5.1 Gevrey 类和空间$E^s_{2,1}$

我们首先引入Gevery 类的概念. 设$s>0$. 记

$$G_s(\mathbb{R}^n) = \left\{ f\in C^\infty(\mathbb{R}^n):\ ^\exists\rho, M>0\ s.t.\ \|f\|_{\dot H^m} \leqslant M\left(\frac{m!}{\rho^m}\right)^s, \forall m\in\mathbb{Z}_+ \right\}. \qquad (2.5.1)$$

我们称$G_s(\mathbb{R}^n)$ 为Gevrey s-类.

我们本节的目标是证明NS方程的解属于Gevrey 1-类. 为了实现这一目标, 我们采用$\mathbb{R}^n$ 的Wiener 分解为工具. 在第6章, 我们将进一步使用频率空间的Wiener 型分解研究色散方程. 设Q_α 为中心在$\alpha \in \mathbb{Z}^n$ 的单位方体, 即, $Q_\alpha = \alpha + Q_0, Q_0 = \{x = (x_1, ...x_n) : -1/2 \leqslant x_i < 1/2\}$. 这种分解我们称之为$\mathbb{R}^n$ 的一致分解. 与$\mathbb{R}^n$ 非齐次的二进制分解相比, 一致分解更加细致, 将一致分解放到频率空间, 然后和Lebesgue空间$\ell^1(L^2)$ 组合, 这就产生了下面的空间类:

$$E^s_{2,1} = \left\{ f \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n) : \|f\|_{E^s_{2,1}} = \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} 2^{s|k|} \left\| \mathscr{F}^{-1}\chi_{Q_k}\widehat{f} \right\|_2 < \infty \right\}, \quad (2.5.2)$$

这类空间及其推广$E^s_{p,q}$ 是由[179] 定义并给出系列研究. 易见$E^s_{2,1}$ 为Banach 空间. $E^s_{2,1}$ 属于加指数正则性权的模空间, 从PDE的角度看, 这类空间与经典的模空间有很大的差别, 它拥有无穷次光滑性, 而经典的模空间$M^s_{2,1}$定义如下(等价范数):

$$M^s_{2,1} = \left\{ f \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n) : \|f\|_{M^s_{2,1}} = \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \langle k\rangle^s \left\| \mathscr{F}^{-1}\chi_{Q_k}\widehat{f} \right\|_2 < \infty \right\}, \quad (2.5.3)$$

其中$\langle k\rangle = 1 + |k|$. $M^s_{2,1}$拥有有限次光滑性, 它和Besov空间$B^{s+n/2}_{2,1}$很接近(见本书后面). $E^s_{2,1}$的无穷次光滑性可以由下面的结果看出(见[179]):

命题2.5.1. 我们有

$$G_1 = \bigcup_{s>0} E^s_{2,1}. \quad (2.5.4)$$

证明. 首先, 我们证明对任何$s > 0$, $E^s_{2,1}$ 是G_1 的子集. 事实上, 对任何$f \in E^s_{2,1}$, $0 < c \ll 1$,

$$\begin{aligned}
\|f\|_{\dot{H}^m} &\lesssim \|\nabla^m f\|_{E^0_{2,1}} \\
&\lesssim \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \|\chi_{Q_k}|\xi|^m \widehat{f}\,\|_2 \\
&\lesssim \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} (|k| + \sqrt{n/2})^m \|\chi_{Q_k}\widehat{f}\,\|_2 \\
&\lesssim \frac{m!}{(cs)^m} \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \frac{(cs)^m(|k|+C)^m}{m!\cdot 2^{s|k|}} 2^{s|k|}\|\chi_{Q_k}\widehat{f}\,\|_2 \\
&\lesssim \frac{m!}{(cs)^m}\|f\|_{E^s_{2,1}}.
\end{aligned}$$

另一方面, 设$f\in G_1$, $L>n/2$, 使用Taylor 公式和Hölder 不等式,

$$\begin{aligned}
\|f\|_{E^s_{2,1}} &= \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} 2^{s|k|}\|\chi_{Q_k}\widehat{f}\,\|_2\\
&\leqslant \|f\|_2+\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(s\ln 2)^m}{m!}\sum_{k\in\mathbb{Z}^n,\ |k|\gg 1}|k|^m\|\chi_{Q_k}\widehat{f}\,\|_2\\
&\lesssim \|f\|_2+\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(s\ln 2)^m}{m!}\sum_{k\in\mathbb{Z}^n,\ |k|\gg 1}C^m|k|^{-L}\|\chi_{Q_k}\widehat{\nabla^{m+L}f}\,\|_2\\
&\lesssim \|f\|_2+\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(Cs)^m}{m!}\|f\|_{\dot H^{L+m}}\\
&\lesssim \|f\|_2+\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(Cs)^m}{m!}\cdot\frac{(m+L)!}{\rho^m}.
\end{aligned}$$

选取$0<s\ll 1$, 易知$\sum_{m=0}^{\infty}(Cs/\rho)^m(m+L)^L$ 为收敛级数. 则$f\in E^s_{2,1}$. □

§2.5.2 热半群在$E^s_{2,1}$中的估计

使用命题2.5.1, 我们要想得到NS方程的解u 属于Gevery 1-类G_1, 只需要说明u 属于某个$E^s_{2,1}$ $(s>0)$ 即可. 按照自然的想法, 我们需要估计$\|H(t)u_0\|_{E^s_{2,1}}$和$\|\mathscr{A}f\|_{E^s_{2,1}}$.

命题2.5.2. *记$H_1(t)=e^{-t(I-\Delta)}$. 存在常数$c>0$ 使得对$j=0,1$,*

$$\|\nabla^j H_1(t)u_0\|_{E^{ct}_{2,1}}\lesssim t^{-j/2}\|u_0\|_{E^0_{2,1}}. \tag{2.5.5}$$

$$\sup_{t\in[0,T]}\left\|\nabla^j\int_0^t H_1(t-\tau)f(\tau)d\tau\right\|_{E^{ct}_{2,1}}\lesssim (T+T^{1-j/2})\sup_{\tau\in[0,T]}\|f(\tau)\|_{E^{c\tau}_{2,1}}. \tag{2.5.6}$$

证明. 为了方便, 我们总采用记号$\langle k\rangle=1+|k|$, 和

$$\Box_k=\mathscr{F}^{-1}\chi_{Q_k}\mathscr{F}. \tag{2.5.7}$$

由Plancherel等式,

$$\|\Box_k H_1(t)u_0\|_2=\|\chi_{Q_k}(\xi)e^{-t(1+|\xi|^2)}\mathscr{F}u_0\|_2\leqslant e^{-ct(1+|k|^2)}\|\Box_k u_0\|_2. \tag{2.5.8}$$

由定义, 两端关于$k\in\mathbb{Z}^n$ 求和, 即可得到(2.5.5).

下面证明(2.5.6). 不妨设$T\leqslant 1$ ($T>1$ 时同理可证). 当$|k|\leqslant C$,

$$\|\nabla\Box_k H_1(t)u_0\|_2\lesssim\|\chi_{Q_k}(\xi)e^{-t(1+|\xi|^2)}\mathscr{F}u_0\|_2\leqslant e^{-ct}\|\Box_k u_0\|_2. \tag{2.5.9}$$

当$|k| \geqslant C$,

$$\|\nabla \Box_k H_1(t) u_0\|_2 \lesssim \||\xi| \chi_{Q_k}(\xi) e^{-t|\xi|^2} \mathscr{F} u_0\|_2 \leqslant t^{-1/2} e^{-ct|k|} \|\Box_k u_0\|_2. \quad (2.5.10)$$

综合(2.5.9) 和(2.5.10), 有

$$\|\nabla \Box_k H_1(t) u_0\|_2 \lesssim (1 + t^{-1/2}) e^{-ct\langle k \rangle} \|\Box_k u_0\|_2. \quad (2.5.11)$$

于是, 对$t \in [0, T]$

$$\left\| \Box_k \nabla \int_0^t H_1(t-\tau) f(\tau) d\tau \right\|_2 \lesssim \int_0^t (t-\tau)^{-1/2} e^{-c(t-\tau)\langle k \rangle} \|\Box_k f(\tau)\|_2 d\tau. \quad (2.5.12)$$

这蕴含(2.5.6) 的一种情况, 另一种情况更简单. □

§2.5.3　$E^s_{2,1}$中的双线性估计

根据命题2.5.2, 我们想要得到NS方程的解属于$E^{ct}_{2,1}$, 则必须估计非线性项$\|u \otimes u\|_{E^{ct}_{2,1}}$. 我们有下面的

命题2.5.3. $E^\lambda_{2,1}$ 为Banach 代数. 更精确地, 我们有

$$\|uv\|_{E^\lambda_{2,1}} \leqslant C 2^{C\lambda} \|u\|_{E^\lambda_{2,1}} \|v\|_{E^\lambda_{2,1}}, \quad (2.5.13)$$

其中C 表示与$\lambda > 0$, $u, v \in E^\lambda_{2,1}$ 无关的常数.

证明. 注意$k \in \mathbb{Z}^n$ 表示$k = (k_1, ..., k_n)$, $k_i \in \mathbb{Z}$, $1 \leqslant i \leqslant n$, $|k| = |k_1| + ... + |k_n|$. 我们有

$$\|uv\|_{E^\lambda_{2,1}} = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} 2^{\lambda |k|} \| \Box_k (uv)\|_2. \quad (2.5.14)$$

易见

$$uv = \sum_{i,j \in \mathbb{Z}^n} (\Box_i u)(\Box_j v). \quad (2.5.15)$$

这蕴含

$$\Box_k (uv) = \sum_{i,j \in \mathbb{Z}^n} \Box_k (\Box_i u \, \Box_j v). \quad (2.5.16)$$

容易看出, $\mathscr{F}(\Box_i u\, \Box_j v) = (\chi_{Q_i}\widehat{u}) * (\chi_{Q_j}\widehat{v})$ 并且

$$\operatorname{supp}(\chi_{Q_i}\widehat{u}) * (\chi_{Q_j}\widehat{v}) \subset \Omega := \{\xi:\ |\xi - i - j| \leqslant 2\sqrt{n}\}. \tag{2.5.17}$$

从而,

$$\Box_k(\Box_i u\, \Box_j v) = 0, \quad |k - i - j| \geqslant 3\sqrt{n}. \tag{2.5.18}$$

我们有

$$\|\Box_k(\Box_i u\, \Box_j v)\|_2 = \|\Box_k(\Box_i u\, \Box_j v)\|_2\, \chi_{(|k-i-j|\leqslant 3\sqrt{n})}. \tag{2.5.19}$$

据Plancherel等式和Hölder 不等式,

$$\begin{aligned}\|\Box_k(\Box_i u\, \Box_j v)\|_2 &\leqslant \|\, \Box_i u\, \Box_j v\|_2\ \chi_{(|k-i-j|\leqslant 3\sqrt{n})} \\ &\leqslant \|\, \Box_i u\|_\infty \|\Box_j v\|_2\ \chi_{(|k-i-j|\leqslant 3\sqrt{n})} \\ &\lesssim \|\, \Box_i u\|_2 \|\Box_j v\|_2\ \chi_{(|k-i-j|\leqslant 3\sqrt{n})}. \end{aligned} \tag{2.5.20}$$

从而,

$$\begin{aligned}\|uv\|_{E^{\lambda}_{2,1}} &\leqslant \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} 2^{\lambda|k|} \sum_{i,j\in\mathbb{Z}^n} \|\Box_k(\Box_i u\, \Box_j v)\|_2 \\ &\lesssim \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \sum_{i,j\in\mathbb{Z}^n} 2^{\lambda|k|} \|\, \Box_i u\|_2 \|\Box_j v\|_2\, \chi_{(|k-i-j|\leqslant 3\sqrt{n})} \\ &\lesssim 2^{C\lambda} \sum_{i,j\in\mathbb{Z}^n} 2^{\lambda(|i|+|j|)} \|\, \Box_i u\|_2 \|\Box_j v\|_2. \end{aligned} \tag{2.5.21}$$

结论得证. □

§2.5.4 NS方程的解的Gevrey正则性

由上述结果, 我们只要证明了NS方程的解属于$E^{ct}_{2,1}$, 则我们就可以说明NS方程的解具有Gevrey 1-类正则性. 设

$$\mathcal{D} = \{u:\ \sup_{0\leqslant t\leqslant t_0} \|u(t)\|_{E^{ct}_{2,1}} \leqslant M\}, \tag{2.5.22}$$

$$d(u,v) = \sup_{0\leqslant t\leqslant t_0} \|u(t) - v(t)\|_{E^{ct}_{2,1}}. \tag{2.5.23}$$

考虑映射:

$$\mathcal{T}: u(t) \to H_1(t)u_0 - \int_0^t H_1(t-\tau)[-u(\tau) + \mathbb{P}\nabla\cdot(u\otimes u)](\tau)d\tau, \tag{2.5.24}$$

我们证明当$u_0 \in E^0_{2,1}$, 存在$t_0 > 0$ 使得$\mathcal{T} : (\mathcal{D}, d) \to (\mathcal{D}, d)$ 为收缩映像. 为方便, 我们记

$$\|u\| = \sup_{0 \leqslant t \leqslant t_0} \|u(t)\|_{E^{ct}_{2,1}}. \tag{2.5.25}$$

设$u \in \mathcal{D}$. 由命题2.5.2 和2.5.3,

$$\begin{aligned} \|\mathcal{T}u\| &\lesssim \|u_0\|_{E^0_{2,1}} + t_0\|u\| + t_0^{1/2}\|(u \otimes u)\| \\ &\lesssim \|u_0\|_{E^0_{2,1}} + t_0\|u\| + t_0^{1/2}\|u\|^2. \end{aligned} \tag{2.5.26}$$

取定$M = 2C\|u_0\|_{E^0_{2,1}}$. 不妨认为$t_0 < 1$. 故当$Ct_0^{1/2}M \leqslant 1/4$ 时, $\mathcal{T}u \in \mathcal{D}$. 类似地, 若$u, v \in \mathcal{D}$,

$$\|\mathcal{T}u - \mathcal{T}v\| \leqslant \frac{1}{2}\|u - v\|. \tag{2.5.27}$$

于是存在$u \in \mathcal{D}$ 满足$\mathcal{T}u = u$. 其余适定性结果可以使用标准的技术证明, 从略.

定理 2.5.4. *设$u_0 \in [E^0_{2,1}]^n_0$. 那么存在$T_m > 0$, 使得NS方程(2.1.5)有唯一解$u \in C([0, T_m); E^0_{2,1})$. 进一步, 存在$t_0 \in (0, T_m)$ 满足*

$$u(t) \in \ [E^{c(t\wedge t_0)}_{2,1}]^n_0, \quad t \in [0, T_m). \tag{2.5.28}$$

如果$T_m < \infty$, 则有$\sup_{0 \leqslant t < T_m} \|u(t)\|_{E^0_{2,1}} = \infty$. 进一步, 还有$u \in C(0, T_m; [L^2]^n_0)$, $\partial_{x_i} u \in L^2(0, T_m;\ [L^2]^n_0)$, 以及

$$\frac{1}{2}\|u(t)\|_2^2 + \frac{1}{2}\int_0^t \|\nabla u(s)\|_2^2 ds = \frac{1}{2}\|u_0\|_2^2, \quad 0 < t < T_m. \tag{2.5.29}$$

如果$\|u_0\|_n$ 充分小, 则$T_m = \infty$.

注记2.5.5. (i) 由定理2.5.4 可推出NS 方程的解属于$C^\infty((0, T_m) \times \mathbb{R}^n)$.

(ii) 定理2.5.4 蕴含NS 方程的解属于Gevrey 1-类, 从而是实解析解.

(iii) 定理2.5.4 也回答了NS 方程的解的光滑性消失的过程.

第三章　线性色散方程解的Strichartz估计

核心数学, 总是涉及那些来自客观世界的问题, 或者来自数学内部必须求得的数目、基本计算、以及求解方程等问题, 这些一直是数学的主要部分. ——M. F. Atiyah[1]

从本章开始我们将研究发展方程. 非线性发展方程的研究依赖于线性发展方程的基本理论. 本章我们将较为详细地研究线性发展方程的解所满足的空间–时间估计, 即所谓的Strichartz型不等式. 我们先以Schrödinger方程为例简单地说明一下Strichartz型不等式的来龙去脉. 考虑

$$\mathrm{i}u_t + \Delta u = f, \quad u(0,x) = u_0(x),$$

其中$\mathrm{i} = \sqrt{-1}$, $\Delta = \sum_{i=1}^n \partial_{x_i}^2$, $u(t,x)$ 为$(t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$的复函数, u_0表示u在时间$t=0$处的初始函数. f表示$(t,x) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$的已知复函数.

我们将上述问题转化为半群的表示. 上述方程两端关于空间变量取Fourier变换得到

$$\mathrm{i}\widehat{u}_t - |\xi|^2 \widehat{u} = \widehat{f}, \quad \widehat{u}(0) = \widehat{u}_0. \tag{3.0.1}$$

在形式上, Schrödinger方程已经转化为常微分方程, 可以在形式上解出

$$u(t) = S(t)u_0 - \mathrm{i}\int_0^t S(t-\tau) f(\tau,\cdot)d\tau,$$

其中$S(t) = e^{\mathrm{i}t\Delta} := \mathscr{F}^{-1} e^{-\mathrm{i}t|\xi|^2}\mathscr{F}$. 在某种意义下可以严格证明上述积分方程和原来的方程等价. 求解上述积分方程, 经过人们长期探索, 认识到$S(t)$满足下面的所谓Strichartz估计:

$$\begin{aligned} &\|S(t)u_0\|_{L^{\gamma(r)}(\mathbb{R},L^r)} \lesssim \|u_0\|_2, \\ &\left\|\int_0^t S(t-\tau)f(\tau,\cdot)d\tau\right\|_{L^{\gamma(r)}(\mathbb{R},L^r)} \lesssim \|f\|_{L^{\gamma(\rho)'}(\mathbb{R},L^{\rho'})} \end{aligned}$$

其中$2 \leqslant r,\rho \leqslant \infty$, $2/\gamma(\cdot) = n(1/2 - 1/\cdot) \in [0,1)$, p'表示p的对偶数. 这种类型的估计在求解非线性方程中扮演者重要的作用, 我们在下一章的引言部分将具体说明为什么要使用Strichartz估计. 这种类型的估计不是个别现象, 对一类色散波方程, 如波动方程, Klein-Gordon方程, KdV方程等都有类似的估计. 本章我们将较为详细地讨论这类估计.

[1]M. F. Atiyah (1929–), 英国著名数学家, 合作发现的Atiyah-Singer指标定理是二十世纪下半叶的主要数学成就之一, 他也是K–理论的发明人, 1966年获得Fields奖.

§3.1　振荡积分和一类半群的基本估计

本节我们推导一类色散半群$\mathscr{F}^{-1}\exp(\mathrm{i}tP(\xi))\mathscr{F}$的基本$L^p-L^{p'}$估计, 我们将采用两种方法, 前者对$P(\xi)$为齐次函数的情况非常有效, 后者可以处理$P(\xi)$为非齐次函数的情况, 但是需要径向条件.

作为第一种情况的代表, 我们来推导一类半群$U_m(t):=\mathscr{F}^{-1}\exp(\mathrm{i}t|\xi|^m)\mathscr{F}$的基本估计. 本节结果的证明想法可以在Pecher[131]中找到, 我们通过改进Pecher的证明, 当$m>2$时我们就可以得到一个具有光滑效应的$L^p-L^{p'}$估计. 为此我们需要一个Littman引理, 由于证明需要较多的调和分析知识, 详细证明从略,可见Littman[108].

引理3.1.1. 设$v\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\operatorname{supp}v=\Omega$. $P(\xi)$在Ω上为无穷次可微函数, 且对任何$\xi\in\Omega$, 矩阵$(\partial^2P(\xi)/\partial\xi_i\partial\xi_j)_{i,j=1}^n$的秩至少为$\rho>0$, 则存在$K\in\mathbb{N}$使得对任何$\lambda\in\mathbb{R}$,

$$\|\mathscr{F}^{-1}e^{\mathrm{i}\lambda P(\xi)}v\|_\infty\lesssim(1+|\lambda|)^{-\rho/2}\sum_{|\alpha|\leqslant K}\|D^\alpha v\|_\infty. \tag{3.1.1}$$

现在来推导半群$U_m(t)$在齐次Besov空间的基本估计. 设$\{\triangle_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ 由§1.6定义, 用卷积Young不等式(见附录)

$$\|\mathscr{F}^{-1}e^{\mathrm{i}t|\xi|^m}\mathscr{F}\triangle_kf\|_\infty\leqslant\|\mathscr{F}^{-1}e^{\mathrm{i}t|\xi|^m}\varphi(2^{-k}\xi)\|_\infty\|f\|_1, \tag{3.1.2}$$

下面来估计$\|\mathscr{F}^{-1}e^{\mathrm{i}t|\xi|^m}\varphi(2^{-k}\xi)\|_\infty$. 应用膨胀变换的性质(如命题1.1.4)和引理3.1.1,

$$\begin{aligned}&\|\mathscr{F}^{-1}e^{\mathrm{i}t|\xi|^m}\varphi(2^{-k}\xi)\|_\infty\\&=2^{kn}\|\mathscr{F}^{-1}e^{\mathrm{i}t2^{km}|\xi|^m}\varphi(\xi)\|_\infty\lesssim t^{-\rho/2}2^{k(n-m\rho/2)},\end{aligned} \tag{3.1.3}$$

其中ρ表示矩阵$(\partial^2|\xi|^m/\partial\xi_i\partial\xi_j)_{i,j=1}^n$在$\varphi$的支集($\subset\{\xi:|\xi|\in(2^{-1},2)\}$)上的秩, 为

$$\rho=\begin{cases}n-1, & m=1,\\ n, & m\geqslant 2.\end{cases} \tag{3.1.4}$$

从而

$$\|\mathscr{F}^{-1}e^{\mathrm{i}t|\xi|^m}\mathscr{F}\triangle_kf\|_\infty\lesssim t^{-\rho/2}2^{k(n-m\rho/2)}\|f\|_1, \tag{3.1.5}$$

显然, 由Plancherel定理和φ的构造,

$$\|\mathscr{F}^{-1}e^{\mathrm{i}t|\xi|^m}\mathscr{F}\triangle_k f\|_2 \leqslant \|f\|_2. \tag{3.1.6}$$

用Riesz-Thorin插值定理, (3.1.5)和(3.1.6)蕴含了对$2 \leqslant p \leqslant \infty$, $1/p+1/p'=1$,

$$2^{-k(2n-m\rho)(1/2-1/p)}\|U_m(t)\triangle_k f\|_p \lesssim t^{-\rho(1/2-1/p)}\|f\|_{p'}. \tag{3.1.7}$$

为方便, 记

$$2\sigma(m,p) := (2n-m\rho)(1/2-1/p). \tag{3.1.8}$$

(3.1.7)中将f替换为$\sum_{\ell=-1}^{1}\triangle_{k+\ell}f$, 得到

$$2^{-2\sigma(m,p)k}\|U_m(t)\triangle_k f\|_p \lesssim t^{-\rho(1/2-1/p)}\sum_{\ell=-1}^{1}\|\triangle_{k+\ell}f\|_{p'}. \tag{3.1.9}$$

(3.1.9)两端求ℓ^q范数得到

$$\|U_m(t)f\|_{\dot{B}^{-2\sigma(m,p)}_{p,q}} \lesssim t^{-\rho(1/2-1/p)}\|f\|_{\dot{B}^0_{p',q}},\ 2 \leqslant p \leqslant \infty. \tag{3.1.10}$$

再注意嵌入关系$\dot{B}^s_{p,2} \subset \dot{F}^s_{p,2} = \dot{H}^s_p$ 和$\dot{B}^s_{p',2} \supset \dot{F}^s_{p',2} = \dot{H}^s_{p'}$, 便有

$$\|U_m(t)f\|_{\dot{H}^{-2\sigma(m,p)}_p} \lesssim t^{-\rho(1/2-1/p)}\|f\|_{p'},\ 2 \leqslant p < \infty. \tag{3.1.11}$$

分别令$m=1,2$, 我们得到下面的结果:

命题3.1.2. 设$n \geqslant 2$, $W(t) = \mathscr{F}^{-1}e^{\mathrm{i}t|\xi|}\mathscr{F}$, $2 \leqslant p < \infty$, $1 \leqslant q \leqslant \infty$, $1/p+1/p'=1$. 则有

$$\|W(t)f\|_{\dot{B}^{-(n+1)(1/2-1/p)}_{p,q}} \lesssim t^{-(n-1)(1/2-1/p)}\|f\|_{\dot{B}^0_{p',q}}, \tag{3.1.12}$$

$$\|W(t)f\|_{\dot{H}^{-(n+1)(1/2-1/p)}_p} \lesssim t^{-(n-1)(1/2-1/p)}\|f\|_{p'}. \tag{3.1.13}$$

命题3.1.3. 设$n \geqslant 1$, $S(t) = \mathscr{F}^{-1}e^{\mathrm{i}t|\xi|^2}\mathscr{F}$, $2 \leqslant p < \infty$, $1 \leqslant q \leqslant \infty$, $1/p+1/p'=1$. 则有

$$\|S(t)f\|_{\dot{B}^0_{p,q}} \lesssim t^{-n(1/2-1/p)}\|f\|_{\dot{B}^0_{p',q}}, \tag{3.1.14}$$

$$\|S(t)f\|_p \lesssim t^{-n(1/2-1/p)}\|f\|_{p'}. \tag{3.1.15}$$

对高阶$m>2$的情况, 有

命题3.1.4. 设$n\geqslant 1$, $m>2$, $2\leqslant p<\infty$, $1\leqslant q\leqslant\infty$, $1/p+1/p'=1$. 则有

$$\|U_m(t)f\|_{\dot{B}^{-2\sigma(m,p)}_{p,q}}\lesssim t^{-n(1/2-1/p)}\|f\|_{\dot{B}^0_{p',q}}, \tag{3.1.16}$$

$$\|U_m(t)f\|_{\dot{H}^{-2\sigma(m,p)}_p}\lesssim t^{-n(1/2-1/p)}\|f\|_{p'}. \tag{3.1.17}$$

注意$m>2$时$2\sigma(m,p)=n(2-m)(1/2-1/p)<0$, 所以命题3.1.4含有正则性估计.

下面, 我们推导当$m>2$时, $U_m(t)$不具有光滑效应形式的$L^p-L^{p'}$估计. 我们有

命题3.1.5. 设$n\geqslant 1$, $m>2$, $2\leqslant p<\infty$, $1/p+1/p'=1$. 则有

$$\|U_m(t)f\|_p\lesssim t^{-n(1/p'-1/p)/m}\|f\|_{p'}. \tag{3.1.18}$$

证明. 由膨胀变换的性质, 只需要考虑$t=1$的情况. 设$\{\varphi_k\}_0^\infty$ 由§1.3中定义. (3.1.9) 已经蕴含了对$k\geqslant 1$,

$$\|U_m(1)\triangle_k f\|_p\lesssim 2^{2\sigma(m,p)k}\sum_{\ell=-1}^{1}\|\triangle_{k+\ell}f\|_{p'}. \tag{3.1.19}$$

又由 $\operatorname{supp}\varphi_0\subset\{\xi:|\xi|\leqslant 2\}$, 我们有

$$\begin{aligned}\|U_m(1)\triangle_0 f\|_p&\leqslant\sum_{\ell=0}^{1}\|U_m(1)\triangle_0\triangle_\ell f\|_p\\&\lesssim\sum_{\ell=0}^{1}\|\varphi_0\mathscr{F}\triangle_\ell f\|_{p'}\lesssim\sum_{\ell=0}^{1}\|\triangle_\ell f\|_{p'}.\end{aligned} \tag{3.1.20}$$

规定$\triangle_{-1}=0$, 则(3.1.19)对所有$k\geqslant 0$ 都对. 所以(3.1.19)两端求ℓ^2范数得

$$\|U_m(1)f\|_{B^0_{p,2}}\lesssim\|f\|_{B^0_{p',2}}. \tag{3.1.21}$$

类似(3.1.11)的推导, (3.1.21)已经蕴含了

$$\|U_m(1)f\|_p\lesssim\|f\|_{p'}. \tag{3.1.22}$$

由膨胀变换的性质得到命题结论. □

使用(3.1.17), (3.1.18)以及凸性Hölder不等式(命题1.6.5), 我们立即得到

命题3.1.6. 设$n \geqslant 1$, $m > 2$, $2 \leqslant p < \infty$, $1/p + 1/p' = 1$. 则对任何$\theta \in [0,1]$,

$$\|U_m(t)f\|_{\dot{H}_p^{-2\sigma(m,p)\theta}} \lesssim t^{-(n\theta+2n(1-\theta)/m)(1/2-1/p)}\|f\|_{p'}. \tag{3.1.23}$$

上面的方法对处理其他(比如非径向)齐次情况的$P(\xi)$(如部分Riesz位势)也是非常有效的, 注意到上面的证明当$P(\xi)$是非齐次函数的时候, 不能简单地通过scaling得到(3.1.3), 所以我们需要寻求其他途径.

一种基本的想法是, 先将$P(\xi)$简化到径向的情况, 即$P(|\xi|)$的情况, 然后将$P(|\xi|)$分成高频和低频两部分, 假设在低高频有不同的增长阶, 这样的假设对很多模型是够用的. 下面的两个命题中我们总假设P为径向函数. 设$P : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ 为光滑函数, 满足

(H1) 存在$m_1 > 0$, 使得对任何$\alpha \geqslant 2$, $\alpha \in \mathbb{N}$,

$$|P'(r)| \sim r^{m_1-1}, \quad |P^{(\alpha)}(r)| \lesssim r^{m_1-\alpha}, \quad r \geqslant 1.$$

(H2) 存在$m_2 > 0$, 使得对任何$\alpha \geqslant 3$, $\alpha \in \mathbb{N}$,

$$|P'(r)| \sim r^{m_2-1}, \quad |P^{(\alpha)}(r)| \lesssim r^{m_2-\alpha}, \quad 0 < r < 1.$$

(H3) 存在α_1, 使得

$$|P''(r)| \sim r^{\alpha_1-2}, \quad r \geqslant 1.$$

(H4) 存在α_2, 使得

$$|P''(r)| \sim r^{\alpha_2-2}, \quad 0 < r < 1.$$

注记3.1.7. 条件(H1)和(H3)是 P 在高频的增长条件, (H2)和(H4)是 P 在低频的增长条件. 满足上面条件的P很多, 我们关心的情况有下述几种: (1) $P(\xi) = \sqrt{1+|\xi|^2}$, 对应Klein-Gordon方程; (2) $P(\xi) = |\xi|^4 + |\xi|^2$, 对应四阶Schrödinger 方程; (3) $P(\xi) = \sqrt{1+|\xi|^4}$, 对应Beam方程.

注意到$P(|\xi|) = |\xi|$是极其特殊的情况, 虽然$\sqrt{1+|\xi|^2}$在无穷远处和$|\xi|$增长阶相同, 但是$(\partial_{ij}^2\sqrt{1+|\xi|^2})_{n\times n}$ 的秩为n, 并且在$\xi = 0$附近, $\sqrt{1+|\xi|^2}$性质更好, 所以, 我们可以预期Klein-Gordon方程解的基本估计更好.

下面的结果是[58]得到的.

命题3.1.8. 设$n=1$. 记$U(t)=\mathscr{F}^{-1}e^{itP(|\xi|)}\mathscr{F}$. 我们有下面的衰减估计.

(a) 设$\{\triangle_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ 由§1.6定义, P 满足(H1), 则对$k\geqslant 0$, 有

$$\|U(t)\triangle_k u_0\|_\infty \lesssim 2^k\|u_0\|_1;$$

如果P还额外满足(H3), 则

$$\|U(t)\triangle_k u_0\|_\infty \lesssim |t|^{-\theta/2}2^{k(1-\alpha_1\theta/2)}\|u_0\|_1,\quad 0\leqslant\theta\leqslant 1.$$

(b) 设$\{\triangle_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ 由§1.6定义, P满足(H2), 则对$k<0$, 有

$$\|U(t)\triangle_k u_0\|_\infty \lesssim 2^k\|u_0\|_1.$$

如果P还额外满足(H4), 则

$$\|U(t)\triangle_k u_0\|_\infty \lesssim |t|^{-\theta/2}2^{k(1-\alpha_2\theta/2)}\|u_0\|_1,\quad 0\leqslant\theta\leqslant 1.$$

(c) 设$\triangle_0$由§1.3定义, 设P 满足(H2)和(H4)且$m_2=\alpha_2$, 则有

$$\|U(t)\triangle_0 u_0\|_\infty \lesssim (1+|t|)^{-\theta}\|u_0\|_1,\quad 0\leqslant\theta\leqslant\min\left(\frac{1}{m_2},\ \frac{1}{2}\right).$$

作为准备, 我们需要下面的Van der Corput 引理, 证明可以在很多著作找到, 见本书附录.

引理3.1.9. 设$\varphi\in C_0^\infty(\mathbb{R})$, $P\in C^2(\mathbb{R})$ 满足对任何$\xi\in\operatorname{supp}\varphi$, $|P''(\xi)|\geqslant\lambda>0$, 则

$$\left|\int e^{\mathrm{i}P(\xi)}\varphi(\xi)d\xi\right|\lesssim\lambda^{-1/2}(\|\varphi\|_\infty+\|\varphi'\|_1).$$

命题3.1.8的证明. 首先证明(a). 使用卷积Young不等式,

$$\|U(t)\triangle_k u_0\|_\infty\lesssim\|J_k\|_\infty\|u_0\|_1,$$

其中

$$J_k(x)=\mathscr{F}^{-1}(e^{itP(|\xi|)}\varphi(2^{-k}|\xi|))(2^{-k}x).\tag{3.1.24}$$

由(3.1.24)立即有

$$\|J_k\|_\infty \lesssim 2^k, \tag{3.1.25}$$

定义$P_1(\xi) = x\xi + tP(2^k|\xi|)$, 则有$|P_1''(\xi)| \gtrsim |t|2^{km_1}$, $\xi \in \operatorname{supp}\varphi$. 使用Van de Corput 引理, 得到

$$\|J_k\|_\infty \lesssim |t|^{-1/2}2^{k(1-\alpha_1/2)}. \tag{3.1.26}$$

(3.1.25) 和(3.1.26) 作插值, 我们得到对任何$0 \leqslant \theta \leqslant 1$,

$$\|J_k\|_\infty \lesssim |t|^{-\theta/2}2^{k(1-\theta\alpha_1/2)}.$$

从而完成(a) 的证明.

(b) 的证明与(a) 类似, 从略. 下面我们证明(c). 由(b)的第一个结论可以直接推出

$$\|U(t)\triangle_0 u_0\|_\infty \lesssim \sum_{k<0} 2^k\|u_0\|_1 \lesssim \|u_0\|_1. \tag{3.1.27}$$

首先考虑$m_2 < 2$ 的情形. 由于$\min(1/m_2,\ 1/2) = 1/2$, 由(b)得到

$$\|U(t)\triangle_0 u_0\|_\infty \lesssim \sum_{k<0} |t|^{-1/2}2^{k(1-m_2/2)}\|u_0\|_1 \lesssim |t|^{-1/2}\|u_0\|_1. \tag{3.1.28}$$

由(3.1.27)和(3.1.28), 我们就可以得到结果.

其次, 考虑情况$m_2 \geqslant 2$. 只要考虑$m_2 \geqslant 2$ 和$\theta = \min(1/m_2,\ 1/2) = 1/m_2$ 的情况就够了. 通过简单运算, 我们知道,

$$\frac{d}{d\xi}\left(\frac{1}{P'(2^k|\xi|)}\right) \lesssim 2^{-k(m_2-1)}, \quad \xi \in \operatorname{supp}\varphi. \tag{3.1.29}$$

于是, 如果$|x| \leqslant 1$, 那么我们有$|\partial_\xi^m(e^{ix\xi}\varphi(\xi))| \lesssim 1$, 做分部积分我们可以得到,

$$|J_k(x)| \lesssim |t|^{-1}2^{k(1-m_2)}.$$

如果$|x| > 1$, 设k_0 是使得$|x| \leqslant |t|2^{k_0m_2}$成立的最小整数, 于是$|x| \approx |t|2^{k_0m_2}$. 对$|k-k_0| > C \gg 1$, 我们有$|P_1'(\xi)| \geqslant c|t|2^{km_2}$, 做分部积分我们可以得到,

$$|J_k(x)| \lesssim |t|^{-1}2^{k(1-m_2)}.$$

对$|k-k_0|\leqslant C$, 注意$|x|>1$ 且$m_2\geqslant 2$, 我们有

$$|J_k(x)| \lesssim |t|^{-1/2}2^{k(1-m_2/2)} \lesssim |t|^{-1/2}\left(\frac{|x|}{|t|}\right)^{(1-m_2/2)/m_2} \lesssim |t|^{-1/m_2}.$$

于是,

$$\begin{aligned}|\sum_{k\leqslant 0} J_k(x)| &\lesssim \sum_{|k-k_0|\leqslant C} |J_k(x)| + \sum_{|k-k_0|\geqslant C} |J_k(x)| \\ &\lesssim \sum_{|k-k_0|\leqslant C} |t|^{-1/m_2} + \sum_{2^k<|t|^{-1/m_2}} 2^k + \sum_{2^k>|t|^{-1/m_2}} |t|^{-1}2^{k(1-m_2)} \\ &\lesssim |t|^{-1/m_2},\end{aligned}$$

从而完成(c) 的证明. □

在高维空间有类似的结果:

命题3.1.10. 设$n\geqslant 2$. 记$U(t)=\mathscr{F}^{-1}e^{itP(|\xi|)}\mathscr{F}$. 我们有下面的衰减估计.

(a) 设$\{\triangle_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ 由§1.6定义, $k\geqslant 0$, P 满足(H1), 则有

$$\|U(t)\triangle_k u_0\|_\infty \lesssim |t|^{-\theta}2^{k(n-m_1\theta)}\|u_0\|_1,\ 0\leqslant\theta\leqslant\frac{n-1}{2}; \tag{3.1.30}$$

如果P还满足(H3), 则

$$\|U(t)\triangle_k u_0\|_\infty \lesssim |t|^{-n/2}2^{k(n-\frac{m_1 n}{2}-\frac{\alpha_1-m_1}{2})}\|u_0\|_1. \tag{3.1.31}$$

(b) 设$\{\triangle_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ 由§1.6定义, 设$k<0$, P 满足(H2), 则有

$$\|U(t)\triangle_k u_0\|_\infty \lesssim |t|^{-\theta}2^{k(n-m_2\theta)}\|u_0\|_1,\quad 0\leqslant\theta\leqslant\frac{n-1}{2}; \tag{3.1.32}$$

如果P还满足(H4), 则

$$\|U(t)\triangle_k u_0\|_\infty \lesssim |t|^{-n/2}2^{k(n-\frac{m_2 n}{2}-\frac{\alpha_2-m_2}{2})}\|u_0\|_1. \tag{3.1.33}$$

(c) 设$\triangle_0$由§1.3定义, 设P 满足(H2), 则有

$$\|U(t)\triangle_0 u_0\|_\infty \lesssim (1+|t|)^{-\theta}\|u_0\|_1,\quad 0\leqslant\theta\leqslant\min\left(\frac{n}{m_2},\ \frac{n-1}{2}\right); \tag{3.1.34}$$

如果P还满足(H4)且$\alpha_2=m_2$, 则

$$\|U(t)\triangle_0 u_0\|_\infty \lesssim (1+|t|)^{-\theta}\|u_0\|_1,\quad 0\leqslant\theta\leqslant\min\left(\frac{n}{m_2},\ \frac{n}{2}\right). \tag{3.1.35}$$

证明. 证明想法如下: 首先, 使用Bessel函数, 通过极坐标变换将问题转化成一维振荡积分情形; 其次, 使用Bessel函数的衰减性, 就可以用与一维类似的技巧证明结论. 用$J_m(r)$表示Bessel函数:

$$J_m(r) = \frac{(r/2)^m}{\Gamma(m+1/2)\pi^{1/2}} \int_{-1}^{1} e^{irt}(1-t^2)^{m-1/2}dt, \quad m > -1/2.$$

我们首先列举Bessel函数的一些性质, 可以在[141], [46]中找到.

引理3.1.11. 对任何$0 < r < \infty$, 我们有

(i) $J_m(r) \leqslant Cr^m$,

(ii) $\frac{d}{dr}(r^{-m}J_m(r)) = -r^{-m}J_{m+1}(r)$.

(i)的证明是显然的, (ii)可以由分部积分直接得到. 如所周知, 任何径向函数f 的Fourier变换仍为径向函数(见[140]):

$$\hat{f}(\xi) = 2\pi \int_0^\infty f(r)r^{n-1}(r|\xi|)^{-(n-2)/2}J_{\frac{n-2}{2}}(r|\xi|)dr, \tag{3.1.36}$$

由引理3.1.11, 对任何$0 \leqslant s \leqslant 2$ and for any $k \geqslant 0$,

$$\left|\frac{\partial^k}{\partial r^k}(\psi(r)r^{n-1}(rs)^{-(n-2)/2}J_{\frac{n-2}{2}}(rs))\right| \leqslant C_k. \tag{3.1.37}$$

如果$m = -\frac{n-2}{2}$, $J_m(r)$ 有下面的性质(见[69], Chapter 1, (1.5)),

$$r^{-\frac{n-2}{2}}J_{\frac{n-2}{2}}(r) = c_n\mathscr{R}(e^{ir}h(r)), \tag{3.1.38}$$

其中h 满足

$$|\partial_r^k h(r)| \leqslant c_k(1+r)^{-\frac{n-1}{2}-k}. \tag{3.1.39}$$

由此得到, 对任何$s \geqslant 2$ 和$k \geqslant 0$,

$$|\partial_r^k(\psi(r)r^{n-1}h(rs))| \leqslant c_k s^{-\frac{n-1}{2}}. \tag{3.1.40}$$

现在证明(a). 由Young不等式

$$\|U(t)\triangle_k u_0\|_\infty \quad \lesssim \quad \|\mathscr{F}^{-1}e^{itP(|\xi|)}\psi(2^{-k}|\xi|)\|_\infty\|u_0\|_1.$$

使用(3.1.36) 我们有

$$\mathscr{F}^{-1}(e^{itP(|\xi|)}\psi(2^{-k}|\xi|))(x) =2^{kn}\mathscr{F}^{-1}(e^{itP(|2^k\xi|)}\psi(|\xi|))(2^k|x|)$$

$$
\begin{aligned}
&=2^{kn}\int_0^\infty e^{itP(2^kr)}\psi(r)r^{n-1}(r2^ks)^{-(n-2)/2}J_{\frac{n-2}{2}}(r2^ks)dr\\
&:=I_k(2^ks),
\end{aligned}
$$

其中$s=|x|$, $J_{\frac{n-2}{2}}(r)$ 表示Bessel 函数. 只要证明

$$
\|I_k(s)\|_\infty \leqslant |t|^{-\theta}2^{k(n-m_1\theta)}.
$$

引理3.1.11 的(i) 蕴含,

$$
\|I_k(s)\|_\infty \lesssim 2^{kn}. \tag{3.1.41}
$$

接下来我们分别考虑下面两种情况.

Case 1. $s\leqslant 2$. 在这种情况下, 我们使用Bessel函数在0点的消失性质. 记$D^r=(\frac{1}{itP'(2^kr)2^k})\frac{d}{dr}$. 我们有$D^r(e^{itP(2^kr)})=e^{itP(2^kr)}$. 由条件(H1), 对任何$m\geqslant 0$ and $r\sim 1$,

$$
\frac{d^m}{dr^m}\left(\frac{1}{P'(2^kr)}\right)\leqslant C_m2^{-k(m_1-1)}. \tag{3.1.42}
$$

记$\tilde{\psi}(r)=\psi(r)r^{n-1}$. 做分部积分, 对任何$q\in\mathbb{Z}^+$, 有

$$
\begin{aligned}
I_k(s)&=2^{kn}\int_0^\infty e^{itP(2^kr)}\tilde{\psi}(r)(rs)^{-\frac{n-2}{2}}J_{\frac{n-2}{2}}(rs)dr\\
&=2^{kn}\int_0^\infty D^r(e^{itP(2^kr)})\tilde{\psi}(r)(rs)^{-\frac{n-2}{2}}J_{\frac{n-2}{2}}(rs)dr\\
&=-\frac{2^{kn}}{it2^k}\int_0^\infty e^{itP(2^kr)}\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{P'(2^kr)}\tilde{\psi}(r)(rs)^{-\frac{n-2}{2}}J_{\frac{n-2}{2}}(rs)\right)dr\\
&=\frac{2^{kn}}{(it2^k)^q}\sum_{m=0}^{q}\sum_{l_1,\dots l_q\in\Lambda_m^q}C_{q,m}\\
&\quad\cdot\int_0^\infty e^{itP(2^kr)}\prod_{j=1}^{q}\partial_r^{l_j}\left(\frac{1}{P'(2^kr)}\right)\partial_r^{q-m}\left(\tilde{\psi}(r)(rs)^{-\frac{n-2}{2}}J_{\frac{n-2}{2}}(rs)\right)dr,
\end{aligned}
\tag{3.1.43}
$$

其中$\Lambda_m^q=\{l_1,\dots,l_q\in\mathbb{Z}^+:0\leqslant l_1<\dots<l_q\leqslant q, l_1+\dots l_q=m\}$. 由(3.1.37), (3.1.42) 和(3.1.43), 我们得到对任何$q\in\mathbb{Z}^+$,

$$
|I_k(s)|\lesssim |t|^{-q}2^{k(n-m_1q)}. \tag{3.1.44}
$$

这里, 做多次分部积分的目的是为了保证当q大时, $n-m_1q<0$ (和一维情形类似). (3.1.44) 和(3.1.41) 做插值, 可以得到对任何$\theta\geqslant 0$, $|I_k(s)|\lesssim |t|^{-\theta}2^{k(n-m_1\theta)}$.

Case 2. $s \geqslant 2$. 这种情况下, 我们需要使用Bessel函数的衰减性质.

由(3.1.38) 得到

$$\begin{aligned} I_k(s) &= c_n 2^{kn} \int_0^\infty e^{itP(2^k r)} \tilde{\psi}(r)(e^{irs}h(rs) + e^{-irs}\bar{h}(rs))dr \\ &= c_n 2^{kn} \int_0^\infty e^{i(tP(2^k r)+rs)} \tilde{\psi}(r)h(rs)dr + c_n 2^{kn} \int_0^\infty e^{i(tP(2^k r)-rs)} \tilde{\psi}(r)\bar{h}(rs)dr \\ &:= B_1 + B_2. \end{aligned}$$

不失一般性, 我们可以假设$t > 0$ 和$P'(r) > 0$. 考虑B_1 的估计, 令$P_1(r) = tP(2^k r) + rs$. 注意到$P_1'(r) = t2^k P'(2^k r) + s \geqslant ct2^{km_1}$, 易知(3.1.42) 中用$P_1$ 替换P 仍然成立. 由(3.1.40), 类似Case 1 我们可以得到对任何$\theta \geqslant 0$,

$$|B_1| \lesssim |t|^{-\theta} 2^{k(n-m_1\theta)}.$$

考虑B_2 的估计, 令$P_2(r) = tP(2^k r) - rs$. 注意到若$s = t2^k P'(2^k r)$, 那么$P_2'(r) = 0$. 我们将讨论分成下面两种情况.

Case 2a. $s > 2\sup_{r\in[1/2,2]} t2^k P'(2^k r)$ 或者, $s < \frac{1}{2}\inf_{r\in[1/2,2]} t2^k P'(2^k r)$. 在此情况下, 易见$|P_2'(r)| \geqslant ct2^{km_1}$ if $r \sim 1$, 且(3.1.42) 中由P_2 替换P 仍然成立. 使用(3.1.40), 我们得到对任何$\theta \geqslant 0$,

$$|B_2| \lesssim |t|^{-\theta} 2^{k(n-m_1\theta)}.$$

Case 2b. $\frac{1}{2}\inf_{r\in[1/2,2]} t2^k P'(2^k r) \leqslant s \leqslant 2\sup_{r\in[1/2,2]} t2^k P'(2^k r)$. 使用(3.1.40),

$$|B_2| \lesssim 2^{kn} s^{-\frac{n-1}{2}} \lesssim t^{-\frac{n-1}{2}} 2^{k(n-\frac{(n-1)m_1}{2})}. \tag{3.1.45}$$

(3.1.45) 和(3.1.41) 做插值, 我们得到对任何$0 \leqslant \theta \leqslant \frac{n-1}{2}$, 有

$$|B_2| \leqslant t^{-\theta} 2^{k(n-m_1\theta)}. \tag{3.1.46}$$

如果(H3)成立, 则$|P_2''(r)| \geqslant t2^{k\alpha_1}$. 使用Van der Corput 引理,

$$|B_2| \lesssim (t2^{k\alpha_1})^{-1/2} \int_0^\infty |\frac{d}{dr}(\tilde{\psi}(r)h(rs))|dr \lesssim t^{-n/2} 2^{k(n-\frac{n}{2}(m_1+\frac{\alpha_1-m_1}{n}))}. \tag{3.1.47}$$

从而完成(a) 的证明.

(b) 的证明和(a) 的证明类似, 从略. 现在来证明(c). 固定$0 \leqslant \theta \leqslant \min(\frac{n}{m_2}, \frac{n-1}{2})$. 若$\theta < \frac{n}{m_2}$, 则有$n - m_2\theta > 0$. 由(b) 的结果, 立即有

$$\begin{aligned}\|U(t)\triangle_0 u_0\|_\infty &\lesssim \sum_{k=-\infty}^{2} |t|^{-\theta} 2^{k(n-m_2\theta)} \|\triangle_0 u_0\|_1 \\ &\lesssim |t|^{-\theta} \|\triangle_0 u_0\|_1.\end{aligned}$$

现假设$\frac{n-1}{2} \geqslant \frac{n}{m_2}$ 且$\theta = \frac{n}{m_2}$. 由(b) 的证明知道, 若$k_0 < 0$ 且$s \sim t 2^{k_0 m_2} \geqslant 2$, 则有

$$|I_{k_0}(s)| \lesssim t^{-\frac{n-1}{2}} 2^{k_0(n-\frac{(n-1)m_2}{2})} \lesssim t^{-\frac{n}{m_2}}.$$

如果$|k-k_0| > C \gg 1$, 那么

$$|I_k(s)| \lesssim t^{-\alpha} 2^{k(n-m_2\alpha)}, \ \forall\ \alpha \ \geqslant 0.$$

从而, 选取α 足够大, 我们有

$$\begin{aligned}|I_{\leqslant 0}(s)| &\lesssim \sum_{|k-k_0|\leqslant C} |I_k(s)| + \sum_{|k-k_0|>C} |I_k(s)| \\ &\lesssim t^{-\frac{n}{m_2}} + \sum_{2^k < t^{-\frac{1}{m_2}}} 2^{kn} + \sum_{2^k > t^{-\frac{1}{m_2}}} t^{-\alpha} 2^{k(n-m_2\alpha)} \\ &\lesssim t^{-\frac{n}{m_2}}.\end{aligned}$$

由此得到结果. 当(H4)满足且$m_2 = \alpha_2$, 证明是类似的, 从略. □

我们把得到的结果用于Klein-Gordon 方程

$$u_{tt} + u - \Delta u = f(t,x), \quad u(0,x) = u_0(x),\ u_t(0,x) = u_1(x)$$

的解对应着半群$G(t) = e^{\mathrm{i}t(I-\Delta)^{1/2}}$, 我们有下面的

命题3.1.12. 设$G(t) = e^{\mathrm{i}t(I-\Delta)^{1/2}}$, $\theta \in [0,1]$, 记$2\sigma(\theta,\cdot) = (n+1+\theta)(1/2 - 1/\cdot)$, $2/\beta(\theta,\cdot) = (n-1+\theta)(1/2-1/\cdot)$. 则下面的估计成立:

$$\|G(t)f\|_{B^{s-2\sigma(\theta,p)}_{p,q}} \lesssim |t|^{-2/\beta(\theta,p)} \|f\|_{B^s_{p',q}}.$$

§3.2 半群的空间-时间对偶估计

轻视抽象思维, 就如同轻视纸张而赞美竹简一样. ——作者

本节我们推导一类波方程解的空间–时间估计, 即一类半群的空间–时间估计. 这类估计, 起源于R. S. Strichartz的开创性工作[142], 随后有众多的推广, 关于Schrödinger方程, 可见 Kato [72], Cazenave 和 Weissler [22], 关于波动方程, 可见Pecher [131], Ginibre 和Velo [45]. 关于Klein-Gordon方程, 可见Brenner [18, 19]. 我们这里给出的是一个抽象的处理, 见第一作者的博士论文[166] (不过[166]选取的空间更抽象, 发表于[167]). 这就简化和统一了上述各类波方程的解的空间–时间估计; 进一步, 高阶波方程的解的空间–时间估计也作为抽象结果的推论被推出. 记

$$U(t) = \mathscr{F}^{-1} e^{\mathrm{i}tP(\xi)} \mathscr{F}, \quad \mathcal{A} = \int_0^t U(t-\tau) f(\tau, \cdot) d\tau, \tag{3.2.1}$$

其中$P(\cdot): \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$为某个适当光滑的函数. 下面我们总假定

$$X = L^p, \quad \text{或 } X = B^0_{p,2}, \ \ 2 \leqslant p < \infty. \tag{3.2.2}$$

设$U(t)$满足下面的基本估计:

$$\|U(t)f\|_{X^\alpha} \lesssim t^{-\theta} \|f\|_{X^*}, \tag{3.2.3}$$

其中$\alpha \in \mathbb{R}$, $\theta \in (0,1)$, $X^\alpha := (I - \triangle)^{-\alpha/2} X$, X^*表示X的对偶空间. 在只假设(3.2.3)的情况下, 我们就可以得到$U(\cdot)$和$\mathcal{A}$的一些很有趣的估计. 使用(3.2.1)和(3.2.3),

$$\|\mathcal{A}f\|_{X^\alpha} \lesssim \int_0^t |t-\tau|^{-\theta} \|f(\tau)\|_{X^*} d\tau, \tag{3.2.4}$$

再使用Hardy-Littlewood-Sobolev不等式, 我们立即有

引理3.2.1. 设(3.2.2)和(3.2.3)满足. 则对任何$T > 0$, $s \in \mathbb{R}$,

$$\|\mathcal{A}f\|_{L^{2/\theta}(-T,T;X^{s+\alpha})} \lesssim \|f\|_{L^{(2/\theta)'}(-T,T;(X^*)^s)}, \tag{3.2.5}$$

其中$(2/\theta)'$表示$2/\theta$的对偶数, 即$\theta/2 + 1/(2/\theta)' = 1$.

为方便, 我们用$\mathcal{D}_T$表示定义在$(-T,T)$取值在$\mathscr{S}$中的取有限个值的函数全体, 用I表示区间$(-T,T)$. 易知当$2 \leqslant p < \infty$时, $\mathcal{D}_T$在$L^q(I,(X^*)^s)$ $(s \in \mathbb{R}, 1 \leqslant q < \infty)$中稠密.

引理3.2.2. 设(3.2.2)和(3.2.3)满足. 则,

$$\|U(t)f\|_{L^{2/\theta}(\mathbb{R},X^{s+\alpha/2})} \lesssim \|f\|_{H^s}. \tag{3.2.6}$$

证明. 首先我们证明对任何$T>0$, $I=(-T,T)$, $\varphi\in\mathscr{S}$, $\psi\in\mathcal{D}_T$,

$$\left|\int_{-T}^{T}(U(t)\varphi,\psi(t))dt\right| \lesssim \|\varphi\|_2\|\psi\|_{L^{(2/\theta)'}(I,(X^*)^{-\alpha/2})}. \tag{3.2.7}$$

事实上,

$$\left|\int_{-T}^{T}(U(t)\varphi,\psi(t))dt\right| \lesssim \|\varphi\|_2\left\|\int_{-T}^{T}U(-t)\psi(t)dt\right\|_2. \tag{3.2.8}$$

由引理3.2.1,

$$\begin{aligned}
&\left\|\int_{-T}^{T}U(-t)\psi(t)dt\right\|_2^2\\
&=\left|\int_{-T}^{T}\left(\psi(t),\int_{-T}^{T}U(t-\tau)\psi(\tau)d\tau\right)dt\right|\\
&\lesssim \|\psi\|_{L^{(2/\theta)'}(I,(X^*)^{-\alpha/2})}\left\|\int_{-T}^{T}U(t-\tau)\psi(\tau)d\tau\right\|_{L^{2/\theta}(I,X^{\alpha/2})}\\
&\lesssim \|\psi\|^2_{L^{(2/\theta)'}(I,(X^*)^{-\alpha/2})}.
\end{aligned} \tag{3.2.9}$$

结合(3.2.8)和(3.2.9)我们便知(3.2.7)成立. 由于$\mathscr{S}$在L^2中稠密, $\mathcal{D}_T$在$L^{(2/\theta)'}(I,(X^*)^{-\alpha/2})$ 中稠密, 故由(3.2.7)知道

$$\|U(t)\varphi\|_{L^{2/\theta}(I,X^{\alpha/2})} \lesssim \|\varphi\|_2. \tag{3.2.10}$$

注意上面的估计与T无关, 令$T\to\infty$, 得到上式将$(-T,T)$替换为$\mathbb{R}$也对. 再令$\varphi=(I-\Delta)^{s/2}f$, 便得到所要的结论. □

引理3.2.3. 设(3.2.2)和(3.2.3)满足. 则对任何$T>0$, $I=(-T,T)$,

$$\|\mathcal{A}f\|_{L^\infty(I,H^{s+\alpha/2})} \lesssim \|f\|_{L^{(2/\theta)'}(I,(X^*)^s)}. \tag{3.2.11}$$

证明. 类似引理3.2.2, 只要证明对任何$f\in\mathcal{D}_T$,

$$\|\mathcal{A}f\|_{L^\infty(I,H^{\alpha/2})} \lesssim \|f\|_{L^{(2/\theta)'}(I,X^*)}. \tag{3.2.12}$$

事实上, 为方便, 我们记$J_s = (I-\Delta)^{s/2}$, 有

$$\begin{aligned}\|\mathcal{A}f\|_{H^{\alpha/2}}^2 &= (\mathcal{A}J_{\alpha/2}f, \mathcal{A}J_{\alpha/2}f) \\ &\lesssim \|f\|_{L^{(2/\theta)'}(I,X^*)} \left\| \int_0^t U(\cdot-\tau)f(\tau)d\tau \right\|_{L^{2/\theta}(I,X^\alpha)}.\end{aligned} \tag{3.2.13}$$

使用与引理3.2.1一样的技巧,

$$\left\| \int_0^t U(\cdot-\tau)f(\tau)d\tau \right\|_{L^{2/\theta}(I,X^\alpha)} \lesssim \|f\|_{L^{(2/\theta)'}(I,X^*)} \tag{3.2.14}$$

结合(3.2.13), (3.2.14)我们得到(3.2.12). □

引理3.2.4. 设(3.2.2)和(3.2.3)满足. 则对任何$T>0$, $I=(-T,T)$,

$$\|\mathcal{A}f\|_{L^{2/\theta}(I,X^{s+\alpha/2})} \lesssim \|f\|_{L^1(I,H^s)}. \tag{3.2.15}$$

证明. 类似引理3.2.2, 只要证明对任何$f\in\mathcal{D}_T$,

$$\|\mathcal{A}f\|_{L^{2/\theta}(I,X^{\alpha/2})} \lesssim \|f\|_{L^1(I,L^2)}. \tag{3.2.16}$$

设ψ, $f\in\mathcal{D}_T$, 我们有

$$\begin{aligned}&\left| \int_0^T (\mathcal{A}f(t),\psi(t))dt \right| \\ &\lesssim \|f\|_{L^1(0,T;L^2)} \left\| \int_\cdot^T U(\cdot-t)\psi(t)dt \right\|_{L^\infty(I,L^2)}.\end{aligned} \tag{3.2.17}$$

类似引理3.2.3, 有

$$\left\| \int_\cdot^T U(\cdot-t)\psi(t)dt \right\|_{L^\infty(I,L^2)} \lesssim \|\psi\|_{L^{(2/\theta)'}(I,(X^*)^{-\alpha/2})}. \tag{3.2.18}$$

可以类似地估计$\int_{-T}^0 (\mathcal{A}f(t),\psi(t))dt$. 从而, (3.2.17)和(3.2.18)蕴含

$$\left| \int_0^T (\mathcal{A}f(t),\psi(t))dt \right| \lesssim \|f\|_{L^1(0,T;L^2)} \|\psi\|_{L^{(2/\theta)'}(I,(X^*)^{-\alpha/2})}. \tag{3.2.19}$$

使用(3.2.19), 由对偶关系可以直接得到(3.2.16). □

注记3.2.5. 若(3.2.3)被下面的估计所取代,

$$\|U(t)f\|_{\dot{X}^\alpha} \lesssim t^{-\theta}\|f\|_{\dot{X}^*}, \tag{2.2.3a}$$

其中$\dot{X} = L^p$或$\dot{X} = \dot{B}^0_{p,2}$. 在引理3.2.1–3.2.4中, 替换原来的空间为相应的齐次空间, 结论仍然成立. 比如, 引理3.2.2的结论应为

$$\|U(t)f\|_{L^{2/\theta}(I,\dot{X}^{s+\alpha/2})} \lesssim \|f\|_{\dot{H}^s}. \tag{2.2.6a}$$

这些结果的证明与非齐次空间的情况是平行的, 从略.

下面我们将得到的空间–时间估计应用到具体的波方程的解. 虽然我们可以就上一节得到的一般估计(3.1.10), (3.1.11)给出一般结论, 但是, 为了便于应用, 且此类估计对各类具体方程格外重要, 我们还是分别就$S(t)$, $W(t)$和$U_m(t)$给出结果. 先看Schrödinger群$S(t) = e^{\mathrm{i}t\Delta}$和高阶群$U_m(t) = e^{\mathrm{i}t(-\Delta)^{m/2}}$不带光滑效应的估计:

定理 3.2.6. 设$m \geqslant 2$,

$$m^* = \begin{cases} \infty, & n \leqslant m, \\ 2n/(n-m), & n > m, \end{cases} \tag{3.2.20}$$

$$\frac{1}{\gamma(\cdot)} = \frac{n}{m}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\cdot}\right). \tag{3.2.21}$$

设$2 \leqslant r, p < m^*$, $U_m(t) = e^{\mathrm{i}t(-\Delta)^{m/2}}$. 则下面的估计成立:

$$\|U_m(t)\phi\|_{L^{\gamma(p)}(I,\dot{B}^s_{p,2})} \lesssim \|\phi\|_{\dot{H}^s}, \tag{3.2.22}$$

$$\|\mathcal{A}_{U_m} f\|_{L^{\gamma(p)}(I,\dot{B}^s_{p,2})} \lesssim \|f\|_{L^{\gamma(r)'}(I,\dot{B}^s_{r',2})}, \tag{3.2.23}$$

其中$I \subset \mathbb{R}$为任意区间, $\mathcal{A}_{U_m} := \int_0^t U_m(t-\tau)\cdot d\tau$. 在(3.2.22), (3.2.23)中, 将齐次Besov空间替换为相应Besov空间, 或相应位势空间H^s_ρ, $\dot{H}^s_\rho$ $(\rho = r, p)$, 结论仍然成立.

容易知道, 波动方程

$$u_{tt} - \Delta u = f(t,x), \quad u(0,x) = u_0(x),\ u_t(0,x) = u_1(x) \tag{3.2.24}$$

的解对应着半群$W(t)$, 我们有下面的

定理 3.2.7. 设$W(t) = e^{\mathrm{i}t(-\Delta)^{1/2}}$, $n \geqslant 2$,

$$2^{**} = \begin{cases} \infty, & n = 2,3, \\ 2(n-1)/(n-3), & n > 3, \end{cases} \tag{3.2.25}$$

$$\frac{2\sigma(\cdot)}{n+1} = \frac{2}{(n-1)\beta(\cdot)} = \frac{1}{2} - \frac{1}{\cdot}. \tag{3.2.26}$$

设$2 \leqslant r, p < 2^{**}$, 则下面的估计成立:

$$\|W(t)\phi\|_{L^{\beta(p)}(I,\dot{B}^{s-\sigma(p)}_{p,2})} \lesssim \|\phi\|_{\dot{H}^s}, \tag{3.2.27}$$

$$\|\mathcal{A}_W f\|_{L^{\beta(p)}(I,\dot{B}^{s-\sigma(p)}_{p,2})} \lesssim \|f\|_{L^{\beta(r)'}(I,\dot{B}^{s+\sigma(r)}_{r',2})}, \tag{3.2.28}$$

其中$I \subset \mathbb{R}$为任意区间, $\mathcal{A}_W := \int_0^t W(t-\tau)\cdot d\tau$. 在(3.2.27), (3.2.28)中, 将齐次Besov空间替换为相应Riesz位势空间$\dot{H}^s_\rho$ $(\rho = r, p)$, 结论仍然成立.

Klein-Gordon方程

$$u_{tt} + u - \Delta u = f(t,x), \quad u(0,x) = u_0(x),\ u_t(0,x) = u_1(x) \tag{3.2.29}$$

的解对应着半群$G(t) = e^{\mathrm{i}t(I-\Delta)^{1/2}}$, 我们有下面的

定理 3.2.8. 设$G(t) = e^{\mathrm{i}t(I-\Delta)^{1/2}}$, $\theta \in [0,1]$, 若$n > 3-\theta$, 则记$2^{**} = 2(n-1+\theta)/(n-3+\theta)$; 若$n \leqslant 3-\theta$, 则记$2^{**} = \infty$. 设$2 \leqslant r, p < 2^{**}$, $2\sigma(\theta,\cdot) = (n+1+\theta)(1/2-1/\cdot)$, $2/\beta(\theta,\cdot) = (n-1+\theta)(1/2-1/\cdot)$. 则下面的估计成立:

$$\|G(t)\phi\|_{L^{\beta(\theta,p)}(I,B^{s-\sigma(\theta,p)}_{p,2})} \lesssim \|\phi\|_{H^s}, \tag{3.2.30}$$

$$\|\mathcal{A}_G f\|_{L^{\beta(\theta,p)}(I,B^{s-\sigma(\theta,p)}_{p,2})} \lesssim \|f\|_{L^{\beta(\theta,r)'}(I,B^{s+\sigma(\theta,r)}_{r',2})}, \tag{3.2.31}$$

其中$I = (-T,T) \subset \mathbb{R}$为任意区间, $\mathcal{A}_G := \int_0^t G(t-\tau)\cdot d\tau$. 在(3.2.30), (3.2.31)中, 将Besov空间替换为相应Bessel位势空间, 结论仍然成立.

对高阶半群, 若考虑光滑效应, 我们有下面的结果:

定理 3.2.9. 设$U_m(t) = e^{\mathrm{i}t(-\Delta)^{m/2}}$, $m \geqslant 2$, 2^* 由(3.2.20)定义,

$$\frac{2}{\gamma(\cdot)} = n\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\cdot}\right), \tag{3.2.32}$$

$$2\sigma(m,\cdot) = n(2-m)\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\cdot}\right). \tag{3.2.33}$$

设$2 \leqslant r, p < 2^*$, 则下面的估计成立:

$$\|U_m(t)\phi\|_{L^{\gamma(p)}(I,\dot{B}^{s-\sigma(m,p)}_{p,2})} \lesssim \|\phi\|_{\dot{H}^s}, \tag{3.2.34}$$

$$\|\mathcal{A}_{U_m} f\|_{L^{\gamma(p)}(I, \dot{B}^{s-\sigma(m,p)}_{p,2})} \lesssim \|f\|_{L^{\gamma(r)'}(I, \dot{B}^{s+\sigma(m,r)}_{r',2})}, \tag{3.2.35}$$

其中$I \subset \mathbb{R}$为任意区间, $\mathcal{A}_{U_m} := \int_0^t U_m(t-\tau) \cdot d\tau$. 在(3.2.34), (3.2.35)中, 将齐次Besov空间替换为相应Riesz位势空间$\dot{H}^s_\rho$ $(\rho = r, p)$, 结论仍然成立.

证明. 定理3.2.6–3.2.9的证明雷同, 我们只证明定理3.2.9. 由命题3.1.4,

$$\|U_m(t) f\|_{\dot{B}^{-2\sigma(m,p)}_{p,2}} \lesssim t^{-2/\gamma(p)} \|f\|_{\dot{B}^0_{p',2}}. \tag{3.2.36}$$

令$\dot{X} = \dot{B}^0_{p,2}$, $\alpha = -2\sigma(m,p)$, 由引理3.2.2直接得到(3.2.34). 下面推导(3.2.35). 由引理3.2.1, 3.2.3, 3.2.4和注记3.2.5,

$$\|\mathcal{A}_{U_m} f\|_{L^{\gamma(p)}(I, \dot{B}^{s-\sigma(m,p)}_{p,2})} \lesssim \|f\|_{L^{\gamma(p)'}(I, \dot{B}^{s+\sigma(m,p)}_{p',2})}, \tag{3.2.37}$$

$$\|\mathcal{A}_{U_m} f\|_{L^\infty(I, \dot{H}^s)} \lesssim \|f\|_{L^{\gamma(p)'}(I, \dot{B}^{s+\sigma(m,p)}_{p',2})}, \tag{3.2.38}$$

$$\|\mathcal{A}_{U_m} f\|_{L^{\gamma(p)}(I, \dot{B}^{s-\sigma(m,p)}_{p,2})} \lesssim \|f\|_{L^1(I, \dot{H}^s)}. \tag{3.2.39}$$

情形I. $p \in [2, r]$. 此时可以取到$\theta \in [0,1]$使得$1/p = (1-\theta)/2 + \theta/r$. 由此可以推出

$$\frac{1}{\gamma(p)} = \frac{\theta}{\gamma(r)} + \frac{1-\theta}{\infty}, \quad \sigma(m,p) = \theta\sigma(m,r) + (1-\theta)\sigma(m,2), \tag{3.2.40}$$

故由凸性Hölder不等式和(3.2.37), (3.2.38),

$$\begin{aligned} \|\mathcal{A}_{U_m} f\|_{L^{\gamma(p)}(I, \dot{B}^{s-\sigma(m,p)}_{p,2})} &\leqslant \|\mathcal{A}_{U_m} f\|^{1-\theta}_{L^\infty(I, \dot{B}^{s-\sigma(m,2)}_{2,2})} \|\mathcal{A}_{U_m} f\|^{\theta}_{L^{\gamma(r)}(I, \dot{B}^{s-\sigma(m,r)}_{r,2})} \\ &\lesssim \|f\|_{L^{\gamma(r)'}(I, \dot{B}^{s+\sigma(m,r)}_{r',2})}. \end{aligned} \tag{3.2.41}$$

情形II. $p > r \geqslant 2$. 此时可以取到$\theta \in (0,1)$使得$1/r' = (1-\theta)/2 + \theta/p'$. 由此可以推出

$$\frac{1}{\gamma(r)'} = \frac{\theta}{\gamma(p)'} + \frac{1-\theta}{1}, \quad \sigma(m,r) = \theta\sigma(m,p) + (1-\theta)\sigma(m,2), \tag{3.2.42}$$

由插值关系

$$(L^{\gamma(p)'}(I, \dot{B}^{s+\sigma(m,p)}_{p',2}), \quad L^1(I, \dot{B}^s_{2,2}))_{[\theta]} = L^{\gamma(r)'}(I, \dot{B}^{s+\sigma(m,r)}_{r',2}) \tag{3.2.43}$$

以及(3.2.37)和(3.2.39), 我们知道

$$\mathcal{A}_{U_m} : L^{\gamma(r)'}(I, \dot{B}^{s+\sigma(m,r)}_{r',2}) \to L^{\gamma(p)}(I, \dot{B}^{s-\sigma(m,p)}_{p,2}) \tag{3.2.44}$$

为有界线性算子. 定理3.2.9得证. □

§3.3 半群的空间—时间估计：端点情形

回忆在上一节的空时估计的推导, 出发点是基本估计(3.2.3), 在那里我们始终假定了$\theta \in (0,1)$. 本节中我们考察$\theta = 1$的情况. 仍假设$U(t)$由(3.2.1)定义, 满足对任何$2 < p < \infty$, 存在$\alpha(p) \in \mathbb{R}$, $\theta(p) > 0$使得

$$\|U(t)f\|_{H_p^{\alpha(p)}} \lesssim t^{-\theta(p)}\|f\|_{p'}, \quad \forall\, 2 \leqslant p < \infty. \tag{3.3.1}$$

又设存在$p_1 > 2$ 使得$\theta(p_1) > 1$, 则存在某个$r \in (2, p_1)$使得$\theta(r) = 1$ (原因见下面的(3.3.21)), 即

$$\|U(t)f\|_{H_r^{\alpha(r)}} \lesssim t^{-1}\|f\|_{r'}. \tag{3.3.2}$$

(3.3.2)被称为是端点的情况. 再回忆上节中$\theta \in (0,1)$这一限制是我们在使用Hardy-Littlewood-Sobolev (HLS)不等式时产生的, 见(3.2.4)和(3.2.5). 当$\theta = 1$时, HLS不等式不成立, 故上一节的技巧对$\theta = 1$失效. 这也是我们称$\theta(r) = 1$为端点情况的原因. 但是, 我们断言, 若(3.3.2)发生, 上一节的空时估计仍然是正确的. 我们有

$$\|U(t)\phi\|_{L^2(I,B^s_{r,2})} \lesssim \|\phi\|_{H^{s-\alpha(r)/2}}. \tag{3.3.3}$$

这一估计本质上是由Keel和Tao [73] 得到的[2]. 在[73]中, Keel和Tao巧妙地使用了双线性算子插值和时间局部化的方法. 下面我们将不等式(3.3.3)的证明引向双线性算子估计. 按照(3.2.6)的证明思路, 我们只要证

$$\left|\int_{-T}^{T} (U(t)\varphi, \psi(t))dt\right| \lesssim \|\varphi\|_2 \|\psi\|_{L^2(I,B^{-\alpha(r)/2}_{r',2})}. \tag{3.3.4}$$

为了证明(3.3.4), 类似于(3.2.8)和(3.2.9), 只要证明下式即可:

$$\left\|\int_{-T}^{T} U(-t)\psi(t)dt\right\|_2^2 \lesssim \|\psi\|^2_{L^2(I,B^{-\alpha(r)/2}_{r',2})}. \tag{3.3.5}$$

考察(3.3.5)的左端, 可以写成内积的表示

$$\int_{-T}^{T}\int_{-T}^{T} \big(U(-s)\psi(s),\ U(-t)\psi(t)\big)dsdt. \tag{3.3.6}$$

按照(3.3.6), 可以很自然的引入下面的双线性算子:

$$\mathcal{L}(F,G) := \iint_D \big(U(-s)F(s),\ U(-t)G(t)\big)dsdt \tag{3.3.7}$$

[2]Keel和Tao未考虑$\alpha(r) \neq 0$ 的情形, 我们这里给出的是一个修改过的证明.

其中

$$D := \{(s,t):\ s,t \in [-T,T],\ s \leqslant t\}. \tag{3.3.8}$$

若能证明

$$|\mathcal{L}(F,G)| \lesssim \|F\|_{L^2(I,B^{-\alpha(r)/2}_{r',2})}\|G\|_{L^2(I,B^{-\alpha(r)/2}_{r',2})}, \tag{3.3.9}$$

且注意到s,t在(3.3.5)中地位是一样的，所以取$F = G = \psi$，由(3.3.9)可以推出(3.3.3)．即端点的Strichartz估计也对．

现在问题已经转化成证明双线性估计(3.3.9)．Keel和Tao的想法是将(3.3.7)中的时间差$(t-s)$按二进制分解的技巧加以局部化．令

$$D_j := \{(s,t) \in D:\ T2^j < t-s \leqslant T2^{j+1}\}. \tag{3.3.10}$$

易知$D = \cup_{j\leqslant 0} D_j$．再记

$$\mathcal{L}_j(F,G) := \iint_{D_j} \big(U(t-s)F(s),\ G(t)\big)dsdt \tag{3.3.11}$$

从而，只要证明

$$\sum_j |\mathcal{L}_j(F,G)| \lesssim \|F\|_{L^2(I,B^{-\alpha(r)/2}_{r',2})}\|G\|_{L^2(I,B^{-\alpha(r)/2}_{r',2})} \tag{3.3.12}$$

即可完成(3.3.3)的证明．为此我们需要对$\mathcal{L}_j(F,G)$加以估计．有下面的引理:

引理3.3.1. 设(3.3.1)和(3.3.2)满足，$P = (1/r,1/r)$，又设$(1/a,1/b) \in B(P,\varepsilon)$，$\varepsilon > 0$为适当小的正数．则有

$$|\mathcal{L}_j(F,G)| \lesssim (2^jT)^{-\beta(a,b)}\|F\|_{L^2(I,H^{-\alpha(a)/2}_{a'})}\|G\|_{L^2(I,H^{-\alpha(b)/2}_{b'})}, \tag{3.3.13}$$

其中

$$\beta(a,b) = \frac{1}{2}(\theta(a)+\theta(b)) - 1. \tag{3.3.14}$$

证明. 不妨设F,G为关于时间的支集包含在$[-T,T]$中的Schwartz函数．我们首先对下列三种情况证明(3.3.13);

(1) $a = b = p \in (2,\infty)$;

(2) $2 \leqslant a < r$, $b = 2$;

(3) $a=2$, $2\leqslant b<r$.

首先考虑(1)的情况. 使用Young和Hölder不等式,

$$\begin{aligned}|\mathcal{L}_j(F,G)| &\lesssim \int_I\int_{t-s\sim 2^jT}(t-s)^{-\theta(p)}\|F(s)\|_{H_{p'}^{-\alpha(p)/2}}\|G(t)\|_{H_{p'}^{-\alpha(p)/2}}dsdt\\ &\lesssim (2^jT)^{1-\theta(p)}\|F\|_{L^2(I,H_{p'}^{-\alpha(p)/2})}\|G\|_{L^2(I,H_{p'}^{-\alpha(p)/2})}. \end{aligned}\tag{3.3.15}$$

即(3.3.13)在情形(1)下成立.

再看(2)的情况. 由Hölder不等式,

$$|\mathcal{L}_j(F,G)|\lesssim \left\|\int_{\cdot-2^{j+1}T}^{\cdot-2^jT}U(\cdot-s)F(s)ds\right\|_{L^2(I,L^2)}\|G\|_{L^2(I,L^2)}. \tag{3.3.16}$$

使用(3.3.1)和Hölder不等式,

$$\begin{aligned}&\left\|\int_{\cdot-2^{j+1}T}^{\cdot-2^jT}U(\cdot-s)F(s)ds\right\|_{L^2(I,L^2)}^2\\ &\lesssim \int_I\int_{t-2^{j+1}T}^{t-2^jT}\int_{t-2^{j+1}T}^{t-2^jT}|s-\sigma|^{-\theta(a)}\|F(\sigma)\|_{H_{a'}^{-\alpha(a)/2}}\|F(s)\|_{H_{a'}^{-\alpha(a)/2}}d\sigma dsdt\\ &\lesssim \int_I\int_0^{2^jT}\int_0^{2^jT}|s-\sigma|^{-\theta(a)}\times\\ &\qquad \|F(\sigma+t-2^{j+1}T)\|_{H_{a'}^{-\alpha(a)/2}}\|F(s+t-2^{j+1}T)\|_{H_{a'}^{-\alpha(a)/2}}d\sigma dsdt\\ &\lesssim (2^jT)^{2-\theta(a)}\|F\|_{L^2(I,H_{a'}^{-\alpha(a)/2})}^2. \end{aligned}\tag{3.3.17}$$

故由(3.3.16)和(3.3.17),

$$|\mathcal{L}_j(F,G)|\lesssim (2^jT)^{1-\theta(a)/2}\|F\|_{L^2(I,H_{a'}^{-\alpha(a)/2})}\|G\|_{L^2(I,L^2)}. \tag{3.3.18}$$

情形(3)与情形(2)的证明一样.

用Σ表示$(1/p,\,1/p)$ $(p\gg 1)$, $(1/r,\,1/2)$, $(1/2,1/2)$ 和$(1/2,1/r)$所围成的四边形开区域, 显然包含$B(P,\varepsilon)$. 下面我们证明在Σ内任取一点$(1/a,1/b)$, (3.3.13)都成立. 事实上, 只需要考虑$(1/a,1/b)$属于Σ沿对角线$1/a=1/b$的上半部分区域的情况即可. 可以找到$\eta\in(0,1)$和满足(1), (2)的$(1/p_0,1/p_0)$, $(1/a_0,1/2)$使得

$$\left(\frac{1}{a},\frac{1}{b}\right)=\eta\left(\frac{1}{p_0},\frac{1}{p_0}\right)+(1-\eta)\left(\frac{1}{a_0},\frac{1}{2}\right). \tag{3.3.19}$$

再注意到$U(t)$为$L^2 \to L^2$的一致有界半群, 即

$$\|U(t)\varphi\|_2 = \|\varphi\|_2. \tag{3.3.20}$$

也即$\theta(2) = \alpha(2) = 0$. 故(3.3.20)联合(3.3.1) 就可以看出, 若$\alpha(p_0) \neq 0$, 则对任何$2 < a < p_0$, $\alpha(a) \neq 0$; 若$\alpha(p_0) = 0$, 则对任何$2 < a < p_0$, $\alpha(a) = 0$. 下面我们只考虑$\alpha(p_0) \neq 0$的情形. 易知

$$\frac{\theta(p)}{\theta(q)} = \frac{\alpha(p)}{\alpha(q)} = \frac{1/2 - 1/p}{1/2 - 1/q}. \tag{3.3.21}$$

(3.3.19)和(3.3.21)实际上蕴含了

$$(\theta(a),\, \theta(b)) = \eta(\theta(p_0), \theta(p_0)) + (1-\eta)(\theta(a_0),\, \theta(2)), \tag{3.3.22}$$

$$(\alpha(a),\, \alpha(b)) = \eta(\alpha(p_0),\, \alpha(p_0)) + (1-\eta)(\alpha(a_0),\, \alpha(2)). \tag{3.3.23}$$

从而, 标准的双线性复插值运算就证明了结论. □

下面我们还需要一个“卷积”形式的插值引理(见[11]):

引理3.3.2. 设

$$T: \begin{cases} A_0 \times B_0 \to C_0, \\ A_0 \times B_1 \to C_1, \\ A_1 \times B_0 \to C_1 \end{cases} \tag{3.3.24}$$

为有界双线性算子, 其中(A_0, A_1), (B_0, B_1), (C_0, C_1) 为相容的Banach对[3]. 设$0 < \eta, \eta_i < 1$, $1 \leqslant p, q \leqslant \infty$满足$\eta = \eta_1 + \eta_2$, $1/p + 1/q \geqslant 1$. 则有

$$T: (A_0, A_1)_{\eta_0, p} \times (B_0, B_1)_{\eta_1, q} \to (C_0, C_1)_{\eta, 1} \tag{3.3.25}$$

为有界线性算子.

定理 3.3.3. 设$U(t)$, $\mathcal{A}$由(3.2.1)定义, 满足(3.3.1)和(3.3.2). 设$2 \leqslant p, q \leqslant r$. 则有

$$\|U(t)\phi\|_{L^{2/\theta(p)}(I, B^s_{p,2})} \lesssim \|\phi\|_{H^{s-\alpha(p)/2}}, \tag{3.3.26}$$

$$\|\mathcal{A}f\|_{L^{2/\theta(p)}(I, B^{s-\alpha(p)/2}_{p,2})} \lesssim \|f\|_{L^{(2/\theta(q))'}(I, \dot{B}^{s+\alpha(q)}_{q',2})}. \tag{3.3.27}$$

[3]称(A_0, A_1)为相容的Banach对, 即存在线性拓扑空间A, 使得$A_0, A_1 \subset A$.

证明. 现在我们可以应用引理3.3.1和3.3.2来证明结论(3.3.3)了. 在引理3.3.2中取$p = q = 2$, $\eta = 2/3$, $\eta_0 = \eta_1 = 1/3$. 再取$a_0 = b_0$, $a_1 = b_1$满足

$$\theta(a_0) = 1 + \epsilon, \quad \theta(a_1) = 1 - 2\epsilon, \tag{3.3.28}$$

其中$\epsilon > 0$适当小. 令

$$A_i = B_i = L^2(I, H_{a_i'}^{-\alpha(a_i)/2}), \quad C_i = \ell_\infty^{\beta(a_0,b_i)}, \quad i = 0, 1. \tag{3.3.29}$$

由$\theta(r) = 1$, 结合(3.3.21)我们知道

$$\begin{cases} 1/r = (1-\eta_0)/a_0 + \eta_0/a_1, \\ \alpha(r) = (1-\eta_0)\alpha(a_0) + \eta_0\alpha(a_1), \\ \beta(a_0, b_1) = \beta(a_1, b_0), \\ (1-\eta)\beta(a_0, b_0) + \eta\beta(a_0, b_1) = 0. \end{cases} \tag{3.3.30}$$

注意当$\alpha(p_0) \neq 0$, 有$\alpha(a_0) \neq \alpha(a_1)$, (3.3.30) 蕴含了

$$(A_0, A_1)_{\eta_0,2} = (B_0, B_1)_{\eta_1,2} = L^2(I, B_{r',2}^{-\alpha(r)/2}), \quad (C_0, C_1)_{\eta,1} = \ell_1^0. \tag{3.3.31}$$

所以由引理3.3.2得到

$$\sum_j |\mathcal{L}_j(F, G)| \lesssim \|F\|_{L^2(I,B_{r',2}^{-\alpha(r)/2})} \|G\|_{L^2(I,B_{r',2}^{-\alpha(r)/2})} \tag{3.3.32}$$

我们强调, 上面(3.3.32)右端略去的常数与T无关.

$\alpha(p_0) = 0$ 时上面的插值空间有所变化, 读者可自行写出证明. 于是(3.3.3)得证. (3.3.26)的其余情况上节已经证过了.

下面我们证明(3.3.27). 事实上, (3.3.32)隐含了

$$\|\mathcal{A}f\|_{L^2(I,B_{r,2}^{\alpha(r)/2})} \lesssim \|f\|_{L^2(I,B_{r',2}^{-\alpha(r)/2})}. \tag{3.3.33}$$

用上一节一样的方法可以得到(见引理3.2.3, 3.2.4)

$$\|\mathcal{A}f\|_{L^\infty(I,L^2)} \lesssim \|G\|_{L^2(I,B_{r',2}^{-\alpha(r)/2})}, \tag{3.3.34}$$

$$\|\mathcal{A}f\|_{L^2(I,B_{r,2}^{\alpha(r)/2})} \lesssim \|f\|_{L^1(I,L^2)}. \tag{3.3.35}$$

平行于定理3.2.9的证明, 我们即可得到结论(3.3.27). □

注记3.3.4. 再一次强调, 定理3.3.3的结果不依赖于时间$T > 0$, 即"$\lesssim$"后面隐藏的常数不依赖于$T > 0$. 所以, 我们可以采用标准的极限过程, 得到定理3.3.3对$I = \mathbb{R}$的情况也对.

注记3.3.5. 定理3.3.3中我们要求$r < \infty$. 自然要问$r = \infty$如何? 注意这对应着Schrödinger方程$n = 2$的情况, 和波动方程$n = 3$的情况. 我们的确有反例说明这种情况下定理3.3.3不再成立, 但是对一类特殊的函数, 如径向函数, 结论还是成立的, 见Tao [150].

推论3.3.6. 设$n \geqslant 3$, $S(t) = e^{\mathrm{i}t\Delta}$, $2^* = 2n/(n-2)$, $2 \leqslant r, p \leqslant 2^*$, $2/\gamma(\cdot) = n\left(1/2 - 1/\cdot\right)$. 则下面的估计成立:

$$\|S(t)\phi\|_{L^{\gamma(p)}(I,\dot{B}^s_{p,2})} \lesssim \|\phi\|_{\dot{H}^s}, \tag{3.3.36}$$

$$\left\|\int_0^t S(t-\tau)f(\tau)d\tau\right\|_{L^{\gamma(p)}(I,\dot{B}^s_{p,2})} \lesssim \|f\|_{L^{\gamma(r)'}(I,\dot{B}^s_{r',2})}, \tag{3.3.37}$$

其中$I = (-T, T) \subset \mathbb{R}$为任意区间, 在(3.3.36), (3.2.39)中, 将齐次Besov空间替换为相应Riesz位势空间$\dot{H}^s_\rho$ $(\rho = r, p)$, 结论仍然成立.

推论3.3.7. 设$W(t) = e^{\mathrm{i}t(-\Delta)^{1/2}}$, $n > 3$, $2^{**} = 2(n-1)/(n-3)$, $2 \leqslant r, p \leqslant 2^{**}$, $2\sigma(\cdot) = (n+1)(1/2 - 1/\cdot)$, $2/\beta(\cdot) = (n-1)(1/2 - 1/\cdot)$. 则下面的估计成立:

$$\|W(t)\phi\|_{L^{\beta(p)}(I,\dot{B}^{s-\sigma(p)}_{p,2})} \lesssim \|\phi\|_{\dot{H}^s}, \tag{3.3.38}$$

$$\|\mathcal{A}_W f\|_{L^{\beta(p)}(I,\dot{B}^{s-\sigma(p)}_{p,2})} \lesssim \|f\|_{L^{\beta(r)'}(I,\dot{B}^{s+\sigma(r)}_{r',2})}, \tag{3.3.39}$$

其中$I = (-T, T) \subset \mathbb{R}$为任意区间, $\mathcal{A}_W := \int_0^t W(t-\tau)\cdot d\tau$. 在(3.3.38), (3.3.39)中, 将齐次Besov空间替换为相应Riesz位势空间$\dot{H}^s_\rho$, 结论仍然成立.

推论3.3.8. 设$G(t) = e^{\mathrm{i}t(I-\Delta)^{1/2}}$, $\theta \in [0,1]$, $n > 3 - \theta$, $2^{**} = 2(n-1+\theta)/(n-3+\theta)$, $2 \leqslant r, p \leqslant 2^{**}$, $2\sigma(\theta, \cdot) = (n+1+\theta)(1/2 - 1/\cdot)$, $2/\beta(\theta, \cdot) = (n-1+\theta)(1/2 - 1/\cdot)$. 则下面的估计成立:

$$\|G(t)\phi\|_{L^{\beta(\theta,p)}(I,B^{s-\sigma(\theta,p)}_{p,2})} \lesssim \|\phi\|_{H^s}, \tag{3.3.40}$$

$$\|\mathcal{A}_G f\|_{L^{\beta(\theta,p)}(I,B^{s-\sigma(\theta,p)}_{p,2})} \lesssim \|f\|_{L^{\beta(\theta,r)'}(I,B^{s+\sigma(\theta,r)}_{r',2})}, \tag{3.3.41}$$

其中$I = (-T, T) \subset \mathbb{R}$为任意区间, $\mathcal{A}_G := \int_0^t G(t-\tau)\cdot d\tau$. 在(3.3.40), (3.3.41)中, 将Besov空间替换为相应Bessel位势空间, 结论仍然成立.

第四章　非线性色散波方程的局部、整体解

寻求非线性发展方程解的局部、整体适定性, 需要我们在解与生存空间中寻找一种平衡, 弱解、广义解生存的空间范围太大而难以得到唯一性; 光滑解依赖的空间又太小, 生存成了问题. 寻求解与空间的平衡, 又与方程自身的结构、算子、半群有千丝万缕的联系. 这也正是非线性发展方程的困难和魅力所在.

§4.1　为什么要用Strichartz估计

解非线性色散波方程, 基于半群理论发展起来的空间-时间估计(Strichartz估计)方法在某种程度上实现了解与空间的平衡. 比如, 我们针对非线性Schrödinger (NLS)方程加以简要说明. 考虑

$$\mathrm{i}u_t + \Delta u = f(u), \quad u(0,x) = u_0(x), \tag{4.1.1}$$

其中$\mathrm{i} = \sqrt{-1}$, $f(u) = |u|^\alpha u$ $\Delta = \sum_{i=1}^n \partial_{x_i}^2$, $u(t,x)$ 为$(t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$的复函数, u_0表示u在时间$t = 0$处的初始函数, $\alpha > 0$. 由方程的自身结构, 我们容易推出(4.1.1)的解在形式上满足下面的守恒律

$$\|u(t)\|_2^2 = \|u_0\|_2^2, \quad E(u(t)) = E(u_0), \tag{4.1.2}$$

其中

$$E(u(t)) = \frac{1}{2}\|\nabla u(t)\|_2^2 + \frac{2}{2+\alpha}\|u(t)\|_{2+\alpha}^{2+\alpha}. \tag{4.1.3}$$

按照上面的守恒律, 我们很自然要关心解在$H^1(\mathbb{R}^n)$中的适定性, 尤其是整体适定性.

对任何$\alpha > 0$, 使用紧性方法, 或者抛物正则化方法很容易得到(4.1.1)的弱解的存在性, 但是弱解的唯一性、对初值的连续依赖性以及关于时间的强连续性难以用紧性方法得到; 见[106].

因为$S(t) = e^{\mathrm{i}t\Delta} : L^2 \to L^2$, 自然的想法是用$S(t) : L^2 \to L^2$这一性质在$H^k(k = 0, 1, 2, ...)$中解非线性Schrödinger方程. 按照这种解法, 由半群的标准理论, 得到的解的唯一性, 解对初值的连续依赖性以及关于时间的强连续性是很容易得到的. 但是, 这一解法限制较多. 比如我们考虑(4.1.1)等价的积分方程:

$$u(t) = S(t)u_0 - \mathrm{i}\int_0^t S(t-\tau) f(u(\tau))d\tau, \tag{4.1.4}$$

使用$\|S(t)f\|_2 = \|f\|_2$, 有

$$\begin{aligned}\|u(t)\|_2 &\leqslant \|S(t)u_0\|_2 + \int_0^t \|S(t-\tau)f(u(\tau))\|_2 d\tau \\ &= \|u_0\|_2 + \int_0^t \|f(u(\tau))\|_2 d\tau. \end{aligned} \tag{4.1.5}$$

如果只假设解在$C(0,T;L^2)$空间, 处理非线性项的估计需要限制条件

$$|f(u)| \leqslant C|u|,$$

在此条件下, 我们可以推出

$$\|u\|_{C(0,T;L^2)} \lesssim \|u_0\| + T\|u\|_{C(0,T;L^2)}. \tag{4.1.6}$$

由此可以选取适当小的$T > 0$, 构造压缩影射, 证明积分方程有唯一解$u \in C(0,T;L^2)$.

条件$|f(u)| \leqslant C|u|$对非线性函数而言是非常苛刻的, 它不包含最有物理背景的幂函数这样的非线性项.

类似地, 比如$n = 1$时, 可以在$C(0,T;H^1)$空间中解非线性Schrödinger方程(和上面的不同是需要使用Sobolev嵌入$H^1 \subset L^\infty$), 条件为

$$|f'(u)| \leqslant C|u|^\alpha, \quad 0 < \alpha < \infty.$$

事实上(不妨设$f(0) = 0$), 对$k = 0, 1$,

$$\begin{aligned}\|\nabla^k u(t)\|_2 &\leqslant \|S(t)\nabla u_0\|_2 + \int_0^t \|S(t-\tau)\nabla^k f(u(\tau))\|_2 d\tau \\ &\lesssim \|\nabla^k u_0\|_2 + \int_0^t \||u|^\alpha \nabla^k u\|_2 d\tau. \\ &\lesssim \|\nabla^k u_0\|_2 + \int_0^t \|u\|_\infty^\alpha \|\nabla^k u\|_2 d\tau. \end{aligned} \tag{4.1.7}$$

进一步

$$\|\nabla^k u\|_{C(0,T;L^2)} \lesssim \|\nabla^k u_0\|_2 + T\|\nabla^k u\|_{C(0,T;L^2)}^{\alpha+1}. \tag{4.1.8}$$

从而可以得到解在$C(0,T;H^1)$中的适定性.

这种想法可以推广到在$C(0,T;H^s)$ $(s > n/2)$空间中解NLS方程, 条件为

$$|f^{(k)}(u)| \leqslant C|u|^{\alpha+1-k}, \quad [n/2] < \alpha < \infty, \quad k = 0, 1, ..., [n/2] + 1.$$

其中$s > n/2$ 是本质的限制, 它保证了$H^s \subset L^\infty$.

按照上面的想法, 当$n \geqslant 2$, 我们不能在H^1中解NLS方程, 从而能量守恒律也无法使用, 无法延拓成整体解.

所以, 我们面临的困难是, 当$n \geqslant 2$,怎样在能量空间中解NLS方程. Strichartz估计部分克服了这样的困难. 用上一章得到的空时估计, 我们就可以获得$\alpha < 2^* - 2$ (2^*的定义见(3.2.20))时(4.1.1) 的H^1-解的整体适定性; 这是由Kato [72] 得到的. 当$\alpha = 2^* - 2$, 基于空时估计方法和进一步使用物理空间局部化方法, Bourgain [12]在1999年首先对径向初值得到当$n = 3, 4$时的整体适定性, Tao 等[31] 发展了Bourgain的局部化技术, 去掉了径向初始值这一假设, 得到$n = 3$时的整体适定性. 高维情形由Tao的学生Visan 所解决.

当$\alpha > 2^* - 2$, 整体解的适定性仍然是尚未解决的问题, 使用目前现有的方法, 似乎很难解决这一问题.

§4.2 Besov 空间中的非线性映象估计

如果我们只考虑非线性色散波方程局部解和小初值的整体解的适定性, 在应用半群结构建立了空时估计之后, 关键技术将是选择适当的空间类做非线性项的估计. 方程自身的守恒结构在这一部分内容中不是必要的. 在本节中, 我们主要建立在Besov 空间中的一个非线性映象估计. 在Besov 空间中估计非线性项, 最早可以追溯到Pecher [130], Brenner [18], Ginibre和Velo [43] 等. 关于Schrödinger方程的一个较为一般的估计可以在Cazenave和Weissler [22]中找到, 其中的技巧是用Besov空间上的差分表示的等价范数. 随后作者[166, 168]得到关于非线性Klein-Gordon方程的非线性项的估计, 其中采用了我们更熟悉的微分—一次差分表示的等价范数. 本节我们将叙述并证明作者[172] 中得到的一个一般的估计, 它涵盖了(高阶)非线性Schrödinger、Klein-Gordon方程的非线性项的估计, 也包含了正则性估计. 用上一章的空时估计和本节的非线性估计, 我们就可以得到局部解和小初值整体解的适定性.

Besov 空间上的非线性估计依赖于Hölder 不等式的两个变形, 一是凸性Hölder 不等式(见命题1.6.5), 另一个是含有嵌入的变形Hölder 不等式(见§1.7). 我们知道

$$D^\alpha f(u) = \sum_{q=1}^{|\alpha|} f^{(q)}(u) \sum_{\Lambda_\alpha^q} \prod_{i=1}^{q} D^{\alpha_i} u, \tag{4.2.1}$$

其中$\Lambda_\alpha^q=\Big(\alpha_1+\cdots+\alpha_q=\alpha,\ |\alpha_q|\geqslant\cdots\geqslant|\alpha_1|\geqslant 1\Big)$. 又设$f(u)$ 满足

$$|f^{(k)}(u)|\leqslant C|u|^{p+1-k},\quad k=0,1,...,|\alpha|, \tag{4.2.2}$$

再注意到[1]

$$\prod_{i=1}^N a_i-\prod_{i=1}^N b_i=\sum_{i=1}^N\prod_{j=1}^{i-1}a_j\prod_{j=i+1}^N b_j(a_i-b_j),$$

则对任何$1\leqslant r'<\infty$, $|\alpha|\geqslant 1$, 我们有

$$\begin{aligned}
&\|\triangle_h D^\alpha f(u)\|_{L^{r'}}\\
&\lesssim\sum_{q=1}^{|\alpha|}\sum_{\Lambda_\alpha^q}\Big\{\Big\|(|u_h|^{p-q}+|u|^{p-q})|u_h-u|\prod_{i=1}^q D^{\alpha_i}u\Big\|_{L^{r'}}\\
&\quad+\sum_{i=1}^q\Big\||u_h|^{p+1-q}\prod_{j=1}^{i-1}D^{\alpha_j}u_h\prod_{j=i+1}^q D^{\alpha_j}uD^{\alpha_i}(u_h-u)\Big\|_{L^{r'}}\Big\}\\
&:=\sum_{q=1}^{|\alpha|}\sum_{\Lambda_\alpha^q}\Big(\|I_q\|_{L^{r'}}+\sum_{i=1}^q\|II_q^i\|_{L^{r'}}\Big),
\end{aligned} \tag{4.2.3}$$

引理4.2.1. 设$2\leqslant r<\infty$, $0\leqslant\delta\leqslant s_0\wedge s<\infty$. 假定$f\in C^{\{s-\delta\}}$ 满足下面的条件:

$$|f^{(k)}(u)|\lesssim|u|^{p+1-k},\quad k=0,1,...,\{s-\delta\},\quad \{s-\delta\}\leqslant p+1. \tag{4.2.4}$$

其中规定, 若a不为整数, $\{a\}=1+[a]$; 若a为整数, $\{a\}=a$. 进一步假设

$$p\Big(\frac1r-\frac{s_0}{n}\Big)+\frac1r-\frac{\delta}{n}=\frac{1}{r'},\quad \frac1r-\frac{s_0}{n}>0. \tag{4.2.5}$$

当$s-\delta\notin\mathbb{N}$, 我们有

$$\|f(u)\|_{\dot B^{s-\delta}_{r',2}}\lesssim\|u\|^p_{\dot B^{s_0}_{r,2}}\|u\|_{\dot B^s_{r,2}}. \tag{4.2.6}$$

当$s-\delta\in\mathbb{N}$, 用Riesz位势空间取代相应的齐次Besov空间, (4.2.6)仍然成立.

证明. 当$s-\delta<1$, 证明是非常简单的, 我们略去详细证明. 下面我们只考虑$s-\delta\geqslant 1$的情形. 不妨假设$s-\delta\notin\mathbb{N}$. 按齐次Besov空间等价范数的定义,

$$\|f(u)\|_{\dot B^{s-\delta}_{r',2}}=\Big(\int_0^\infty t^{-2v}\sum_{|\alpha|=[s-\delta]}\sup_{|h|\leqslant t}\|\triangle_h D^\alpha f(u)\|^2_{L^{r'}}\frac{dt}{t}\Big)^{1/2}, \tag{4.2.7}$$

---
[1] 规定$\prod_{j=1}^0 a_j=\prod_{j=N+1}^N b_j=0$.

其中$v = s - \delta - [s - \delta]$. 由(4.2.4)我们知道$\| \triangle_h D^\alpha f(u)\|_{L^{r'}}$有估计(4.2.3).

第一步. 我们估计

$$A_q := \left(\int_0^\infty t^{-2v} \sup_{|h|\leqslant t} \|I_q\|_{L^{r'}}^2 \frac{dt}{t} \right)^{1/2}. \tag{4.2.8}$$

在(4.2.4)中我们考虑$\|I_q\|_{L^{r'}}$的估计. 令

$$a_0 = (p-q)\Big(\frac{1}{r} - \frac{s_0}{n}\Big), \quad a_0' = \frac{1}{r} - \frac{s_0 + \beta_0 - v}{n},$$
$$a_i = \frac{1}{r} - \frac{s_0 + \beta_i - |\alpha_i|}{n}, \quad i = 1, \cdots, q,$$

其中β_i将在下面选定.

如果$s \leqslant s_0 + 1$, 则我们取$\beta_0 = \beta_1 = \cdots = \beta_{q-1} = 0$ 和$\beta_q = s - s_0$. 因为$s - \delta \geqslant 1$, 我们知道$v = s - \delta - [s - \delta] \leqslant s - \delta - 1 \leqslant s_0$, 故$a_0' > 0$. 由$s - |\alpha_q| \leqslant s_0$, 我们得到$a_q \geqslant 1/r - s_0/n > 0$. 如果$q \geqslant 2$, 那么$|\alpha_i| \leqslant s_0$ 对$i = 1, \cdots, q-1$ 都成立. 若不然, 则有$|\alpha_q| + |\alpha_{q-1}| > s_0 + 1 \geqslant s$, 这不可能. 于是, 我们有$a_i > 0$, $i = 0, 1, ..., q$. 注意到$a_0' + \sum_{i=0}^q a_i = 1/r'$, 结合变形的Hölder 不等式, 便有

$$\|I_q\|_{L^{r'}} \leqslant C\|u\|_{\dot B^{s_0}_{r,2}}^{p-1} \|u_h - u\|_{L^{1/a_0'}} \|u\|_{\dot B^s_{r,2}}. \tag{4.2.9}$$

因此,

$$A_q \leqslant C\|u\|_{\dot B^{s_0}_{r,2}}^{p-1} \|u\|_{\dot B^v_{1/a_0',2}} \|u\|_{\dot B^s_{r,2}} \leqslant C\|u\|_{\dot B^{s_0}_{r,2}}^{p} \|u\|_{\dot B^s_{r,2}}. \tag{4.2.10}$$

下面, 我们考虑$s > s_0 + 1$ 的情形. 我们将选取适当的β_i $(i = 0, 1, ..., q)$ 满足下面的四个条件:

(a) $0 \leqslant \beta_0 \leqslant v, \quad 0 \leqslant \beta_i \leqslant |\alpha_i|, \quad i = 1, \cdots, q,$

(b) $s_0 + \beta_0 \geqslant v, \quad s_0 + \beta_i \geqslant |\alpha_i|, \quad i = 1, \cdots, q,$

(c) $\sum_{i=0}^q \beta_i = s - s_0,$

(d) $s_0 + \beta_i \leqslant s, \quad i = 0, \cdots, q.$

注意条件(a)和(c)可以推出(d), 所以, 只需要找到$\beta_0, \cdots, \beta_q$ 满足(a)–(c)即可.

若$q = 1$, 则我们令$\beta_0 = v, \beta_1 = s - s_0 - v$. 由于$\delta \leqslant s_0$, 故我们有$\beta_1 \leqslant [s - \delta]$ and $s_0 + \beta_1 \geqslant [s - \delta]$. 所以, 条件(a)–(c)得到满足.

接下来我们还需要考虑$q \geqslant 2$的情形. 再把这种情况分成下面三种情况:

首先, 我们考察$|\alpha_q| \geqslant s - s_0 - v$ 的情形. 设$\beta_0 = v$, $\beta_1 = \cdots = \beta_{q-1} = 0$和$\beta_q = s - s_0 - v$. 显然, 条件(a)和(c)成立. 另外, 我们容易看到$s_0 + \beta_q \geqslant |\alpha_q|$, $s_0 + \beta_0 \geqslant v$. 如果$|\alpha_{q-1}| > s_0$, 那么$|\alpha_q| + |\alpha_{q-1}| > s - v \geqslant [s - \delta]$, 此为矛盾. 于是我们有$s_0 + \beta_{q-1} \geqslant |\alpha_{q-1}|$, 这蕴涵条件(b)也对.

下面, 我们考察$s_0 \leqslant |\alpha_q| < s - s_0 - v$ 的情形. 置$\beta_0 = v$, $\beta_i = |\alpha_i|$ for $i = 1, \cdots, q-1$ 和$\beta_q = |\alpha_q| + \delta - s_0$. 直接计算我们就可以得到$\sum_{i=0}^q \beta_i = s - s_0$. 由$\delta \leqslant s_0$ and $|\alpha_q| \geqslant s_0$ 易见$0 \leqslant \beta_q \leqslant |\alpha_q|$, 这导致条件(a)成立. 注意到$s_0 + \beta_q = |\alpha_q| + \delta$, 我们也容易得到条件(b)成立.

只要再考察$|\alpha_q| \leqslant (s - s_0 - v) \wedge s_0$的情况就可以完成$q \geqslant 2$的情形的讨论. 在这种情形下, 我们容易验证$\sum_{i=1}^q |\alpha_i| = [s - \delta] = s - \delta - v \geqslant s - s_0 - v$. 从而, 我们可以取到$\beta_i \in [0, |\alpha_i|]$ $(i = 1, \cdots, q)$ 满足$\sum_{i=1}^q \beta_i = s - s_0 - v$. 再令$\beta_0 = v$. 显然, 条件(a) 和(c)成立. 又从$|\alpha_i| \leqslant |\alpha_q| \leqslant s_0$可以得到条件(b)也对.

从而, 我们找到了$\beta_0, \cdots, \beta_q$满足条件(a)–(d). 我们有,

$$\begin{aligned} a_0' + \sum_{i=0}^q a_i &= p\Big(\frac{1}{r} - \frac{s_0}{n}\Big) + \frac{1}{r} - \frac{s_0 + \beta_0 - v + \sum_{i=1}^q (\beta_i - |\alpha_i|)}{n} \\ &= p\Big(\frac{1}{r} - \frac{s_0}{n}\Big) + \frac{1}{r} - \frac{\delta}{n} = \frac{1}{r'}. \end{aligned}$$

使用变形Hölder不等式,

$$\|I_q\|_{L^{r'}} \leqslant C\|u\|^{p-q}_{\dot{B}^{s_0}_{r,2}} \|u_h - u\|_{L^{1/a_0'}} \prod_{i=1}^q \|u\|_{\dot{B}^{s_0+\beta_i}_{r,2}}. \tag{4.2.11}$$

由(4.2.11)得到

$$\begin{aligned} A_q &\leqslant C\|u\|^{p-q}_{\dot{B}^{s_0}_{r,2}} \|u\|_{\dot{B}^{v}_{1/a_0',2}} \prod_{i=1}^q \|u\|_{\dot{B}^{s_0+\beta_i}_{r,2}} \\ &\leqslant C\|u\|^{p-q}_{\dot{B}^{s_0}_{r,2}} \prod_{i=0}^q \|u\|_{\dot{B}^{s_0+\beta_i}_{r,2}}. \end{aligned} \tag{4.2.12}$$

我们可以选取θ_i $(i = 0, 1, \ldots, q)$ 满足$s_0 + \beta_i = \theta_i s_0 + (1 - \theta_i)s$. 易见$0 \leqslant \theta_i \leqslant 1$, $\sum_{i=0}^q \theta_i = q$ 且$\sum_{i=0}^q (1 - \theta_i) = 1$. 使用凸的Hölder不等式, 有

$$\prod_{i=1}^q \|u\|_{\dot{B}^{s_0+\beta_i}_{r,2}} \leqslant C\|u\|^q_{\dot{B}^{s_0}_{r,2}} \|u\|_{\dot{B}^{s}_{r,2}}. \tag{4.2.13}$$

综上, 我们获得了A_q的估计.

第二步. 我们估计

$$B_q := \sum_{i=1}^{q} B_q^i := \sum_{i=1}^{q} \left(\int_0^\infty t^{-2v} \sup_{|h|\leqslant t} \|II_q^i\|_{L^{r'}}^2 \frac{dt}{t}\right)^{1/2}. \tag{4.2.14}$$

B_q 的估计与A_q 是类似的, 我们仅给出一个证明梗概.

(I) 我们考虑情形$s \leqslant s_0 + 1$. I若$q = 1$, B_q 的估计是平凡的, 从略. 下面考虑B_q^i, $i \neq q$, $q \geqslant 2$的估计. 置

$$\begin{aligned}
a_0 &= (p+1-q)\Big(\frac{1}{r} - \frac{s_0}{n}\Big),\\
a_j &= \frac{1}{r} - \frac{s_0 - |\alpha_j|}{n}, \quad j \neq i, \quad j = 1, \cdots, q-1,\\
a_i &= \frac{1}{r} - \frac{s_0 - v - |\alpha_i|}{n}, \quad a_q = \frac{1}{r} - \frac{s - |\alpha_q|}{n}.
\end{aligned}$$

易知$s_0 \geqslant v + |\alpha_j|$. 若不然, 则有$s - \delta \geqslant |\alpha_q| + |\alpha_j| + v > s_0 + 1 \geqslant s$, 这不可能. 于是, $a_j > 0$, $j = 1, \cdots, q-1$. 又由$s \leqslant s_0 + 1$ 知$a_q > 0$. 使用变形Hölder不等式, 我们得到$\|II_q^i\|_{L^{r'}}$ 的估计, 于是得到B_q^i, $i \neq q$ 的估计. 又令

$$\begin{aligned}
&a_0 = (p+1-q)\Big(\frac{1}{r} - \frac{s_0}{n}\Big), \quad a_j = \frac{1}{r} - \frac{s_0 - |\alpha_j|}{n}, \ \ j = 1, \cdots, q-1,\\
&a_q = \frac{1}{r} - \frac{s_0 - v - |\alpha_q|}{n},
\end{aligned}$$

我们可以估计出B_q^q.

(II) 考虑情形$s > s_0 + 1$. 设

$$a_0 = (p+1-q)\Big(\frac{1}{r} - \frac{s_0}{n}\Big), \ \ a_j = \frac{1}{r} - \frac{s_0 + \beta_j - |\alpha_j|}{n}, \ \ j = 1, \cdots, q,$$

其中$\beta_1, \cdots, \beta_q$ 的选取与第一步一样. 从而

$$(a)\ \ 0 \leqslant \beta_i \leqslant |\alpha_i|; \quad (b)\ \ s_0 + \beta_i \geqslant |\alpha_i|; \quad (c)\ \ \sum_{j=1}^{q} \beta_j = s - s_0 - v.$$

使用变形Hölder不等式,

$$B_q^i \leqslant C\|u\|_{\dot B^{s_0}_{r,2}}^{p+1-q} \Big(\prod_{j\neq i} \|u\|_{\dot B^{s_0+\beta_j}_{r,2}}\Big) \|u\|_{\dot B^{s_0+\beta_i+v}_{r,2}}. \tag{4.2.15}$$

因为$s_0+\beta_j+v\leqslant s$, $1\leqslant j\leqslant q$. 我们断定存在θ_i $(i=1,\ldots,q)$ 满足

$$s_0+\beta_j=\theta_j s_0+(1-\theta_j)s, \quad j\neq i, j=1,...,q$$
$$s_0+\beta_i+v=\theta_i s_0+(1-\theta_i)s.$$

由于$\sum_{i=1}^{q}\theta_i=q-1$, $\sum_{i=1}^{q}(1-\theta_i)=1$, 使用凸性Hölder 不等式我们得到$B_q^i$, $i=1,\cdots,q$ 的估计. 引理的证明结束. □

注记4.2.2. (i) 若$\delta=s_0=0$, 且$s>0$, 那么我们可以将(4.2.6) 稍稍加强为,

$$\|f(u)\|_{\dot{B}^s_{r',2}}\leqslant C\|u\|^p_{L^r}\|u\|_{\dot{B}^s_{r,2}}. \tag{4.2.16}$$

(ii) 引理4.2.1 包含了NLS、NLKG 方程的非线性项的估计(见[12, 22, 28, 116, 131, 168, 169]), 回忆Cazenave 和Weissler [22] 考虑了情形$\delta=0, s_0=s$; 作者[168, 169]考虑了NLKG方程的情形.

(iii) 若非线性项具有指数增长形式, 如$\sinh u$, $(e^{|u|^2}-1)u$, 这种情形下的非线性估计不包括在引理4.2.1中, 可参见Nakamura 和Ozawa [116], 作者[171].

§4.3 H^s-临界和次临界的NLS方程

§4.3.1 $\dot{H}^s$-临界空间

我们还是以NLS方程为例展开讨论, 考虑下面的NLS方程的初值问题:

$$\mathrm{i}u_t+\Delta u=f(u), \quad u(0,x)=u_0(x), \tag{4.3.1}$$

比如设$f(u)=c|u|^\sigma u$. 如果u是(4.3.1)的解, 则$u_\lambda(t,x)=\lambda^{2/\sigma}u(\lambda^2 t,\lambda x)$ 也是(4.3.1)以$\lambda^{2/\sigma}u_0(\lambda\cdot)$为初值的解. 考虑

$$\|u_\lambda\|_{\dot{H}^s(\mathbb{R}^n)}=\lambda^{2/\sigma+s-n/2}\|u\|_{\dot{H}^s(\mathbb{R}^n)}.$$

这导致$\sigma=4/(n-2s)$ 是使得对所有的$\lambda>0$, u_λ保持$\dot{H}^s$范数不变的空间. 从这种角度上说, 当$\sigma>0$, 我们称$\sigma=4/(n-2s)$为NLS方程在$\dot{H}^s(H^s)$中的临界增长阶. 当$s=n/2-2/\sigma$, $\dot{H}^s(H^s)$称为NLS方程的临界空间.

对应于临界的情况, 当$s<n/2$, 我们称$\sigma<4/(n-2s)$为NLS方程在H^s中的次临界增长阶; 当$s\geqslant n/2$, 我们称$\sigma<\infty$为NLS方程在H^s中的次临界增长阶. 我们称$\sigma>4/(n-2s)$为NLS方程在H^s中的超临界增长阶.

§4.3.2 H^s中的适定性

考虑(4.3.1)等价的积分方程:

$$u(t) = S(t)u_0 - \mathrm{i}\int_0^t S(t-\tau)f(u(\tau))d\tau, \tag{4.3.2}$$

其中$S(t) = e^{\mathrm{i}t\Delta}$. 按照第二章第二节得到的空时估计, 我们在选取空间框架时, 若只要求初值属于H^s, 那么(3.2.22) 反馈给我们的工作空间应当是$L^{\gamma(p)}(I, B^s_{p,2})$这种类型的空间. 下面我们按照这种思路寻求NLS方程解在H^s的适定性. 如果我们只关心局部适定性和小初值整体适定性, NLS方程自身的质量和能量守恒结构在这里不是必要的. 先引入非线性项的增长条件:

$$|f^{(k)}(u)| \leqslant C|u|^{\sigma+1-k}, \quad k = 0, 1, ..., [s]+1, \tag{4.3.3}$$

其中$0 \leqslant s < n/2$, $[s]$表示s的整数部分, $0 < \sigma \leqslant 4/(n-2s)$. 下面我们叙述本节的主要结论:

定理 4.3.1. *设$0 \leqslant s < n/2$, $0 < \sigma < 4/(n-2s)$. 假定$f \in C^{[s]+1}$ 满足条件(4.3.3), $[s] \leqslant \sigma$. 若$u_0 \in H^s$, 则存在$T^* := T^*(\|u_0\|_{H^s}) > 0$ 使得(4.3.2)有唯一解*

$$u \in L^{\gamma(r)}_{\mathrm{loc}}([0, T^*); B^s_{r,2}), \tag{4.3.4}$$

其中

$$r = \frac{n(2+\sigma)}{n+s\sigma} \tag{4.3.5}$$

进一步, 对任何$2 \leqslant p \leqslant 2^*$ $(p \neq \infty)$, 有

$$u \in L^{\gamma(p)}_{\mathrm{loc}}([0, T^*); B^s_{p,2}), \tag{4.3.6}$$

且若$T^* < \infty$, 则有

$$\|u\|_{L^{\gamma(r)}([0,T^*);B^s_{r,2})} = \infty, \tag{4.3.7}$$

$$\|u(t)\|_{H^s} \gtrsim (T^*-t)^{1-\sigma(n-2s)/4}, \quad 0 < t < T^*. \tag{4.3.8}$$

定理4.3.1得到H^s解的局部适定性结果, 其中要求σ为H^s次临界增长阶. 如果σ为H^s临界增长阶, 我们可以得到小初值意义下的整体存在性, 详细如下:

定理 4.3.2. 设$0 \leqslant s < n/2$, $\sigma = 4/(n-2s)$. 假定$f \in C^{[s]+1}$ 满足条件(4.3.3), $[s] \leqslant \sigma$. 若$u_0 \in H^s$, 则存在$T^* := T^*(u_0) > 0$ 使得(4.3.2)有唯一解u满足(4.3.4), 其中r和定理4.3.1相同: $r = n(2+\sigma)/(n+s\sigma)$, $\gamma(r) = 2+\sigma$. 对任何$2 \leqslant p \leqslant 2^*$ ($p \neq \infty$), 此解也满足(4.3.6). 且若$T^* < \infty$, 则有(4.3.7)成立.

最后, 若进一步假设$\|u_0\|_{\dot H^s}$适当小, 则上述解是整体解, 即$T^* = \infty$. 且有

$$\|u\|_{\cap_{2\leqslant p\leqslant 2^*,\ p\neq\infty} L^{\gamma(p)}(0,\infty;\dot B^s_{p,2})} \lesssim C\|u_0\|_{\dot H^s}, \tag{4.3.9}$$

$$\|u\|_{\cap_{2\leqslant p\leqslant 2^*,\ p\neq\infty} L^{\gamma(p)}(0,\infty;B^s_{p,2})} \lesssim C\|u_0\|_{H^s}. \tag{4.3.10}$$

注记4.3.3. 定理4.3.1中若$T^* < \infty$, 则T^*有依赖于$\|u_0\|_{H^s}$的下界, 即$T^* \geqslant \delta(\|u_0\|_{H^s}) > 0$. 但是, 在定理4.3.2中若$T^* < \infty$, 则$T^*$没有依赖于$\|u_0\|_{H^s}$的下界, 即$T^*$ 不仅可能依赖于$\|u_0\|_{H^s}$, 而且可能依赖于u_0在H^s的选取, 这容易由膨胀变换$u(t,x) \to u_\lambda(t,x) =: \lambda^{2/\sigma} u(\lambda^2 t, \lambda x)$看到.

证明. 现在我们来证明定理4.3.1和定理4.3.2. 设$T > 0$, $M > 0$, $\delta > 0$ 待定. 置

$$\mathcal{D} = \left\{ u \in L^{\gamma(r)}(0,T;B^s_{r,2}) : \|u\|_{L^{\gamma(r)}(0,T;\dot B^s_{r,2})} \leqslant \delta,\ \ \|u\|_{L^{\gamma(r)}(0,T;B^s_{r,2})} \leqslant M \right\}, \tag{4.3.11}$$

其上赋度量

$$d(u,v) = \|u-v\|_{L^{\gamma(r)}(0,T;L^r)}. \tag{4.3.12}$$

现在考虑映射:

$$\mathscr{T} : u(t) \to S(t)u_0 - \mathrm{i}\int_0^t S(t-\tau) f(u(\tau))d\tau, \tag{4.3.13}$$

我们来证明对适当的$T, \delta, M > 0$, $\mathscr{T} : (\mathcal{D}, d) \to (\mathcal{D}, d)$ 为压缩映射. 易知

$$\sigma\left(\frac{1}{r} - \frac{s}{n}\right) + \frac{1}{r} = \frac{1}{r'}. \tag{4.3.14}$$

由上一节引理3.1.1, 我们有

$$\|f(u)\|_{\dot B^s_{r',2}} \lesssim \|u\|^{\sigma+1}_{\dot B^s_{r,2}}, \tag{4.3.15}$$

$$\|f(u)\|_{B^s_{r',2}} \lesssim \|u\|^{\sigma}_{\dot B^s_{r,2}} \|u\|_{B^s_{r,2}}. \tag{4.3.16}$$

从而,

$$\|f(u)\|_{L^{\gamma(r)'}(0,T;\dot{B}^s_{r',2})} \lesssim T^{1-\sigma(n-2s)/4}\|u\|^{\sigma+1}_{L^{\gamma(r)}(0,T;\dot{B}^s_{r,2})}. \tag{4.3.17}$$

使用定理3.2.6, 有

$$\|\mathscr{T}u\|_{L^{\gamma(r)}(0,T;\dot{B}^s_{r,2})} \lesssim \|u_0\|_{\dot{H}^s} + T^{1-\sigma(n-2s)/4}\|u\|^{\sigma+1}_{L^{\gamma(r)}(0,T;\dot{B}^s_{r,2})}. \tag{4.3.18}$$

类似地, 有

$$\begin{aligned}&\|\mathscr{T}u\|_{L^{\gamma(r)}(0,T;B^s_{r,2})}\\ &\lesssim \|u_0\|_{H^s} + T^{1-\sigma(n-2s)/4}\|u\|^{\sigma}_{L^{\gamma(r)}(0,T;\dot{B}^s_{r,2})}\|u\|_{L^{\gamma(r)}(0,T;B^s_{r,2})}\end{aligned} \tag{4.3.19}$$

$$\begin{aligned}&\|\mathscr{T}u-\mathscr{T}v\|_{L^{\gamma(r)}(0,T;L^r)}\\ &\lesssim T^{1-\sigma(n-2s)/4}(\|u\|^{\sigma}+\|v\|^{\sigma})_{L^{\gamma(r)}(0,T;\dot{B}^s_{r,2})}\|u-v\|_{L^{\gamma(r)}(0,T;L^r)}.\end{aligned} \tag{4.3.20}$$

情形1. $0<\sigma<4/(n-2s)$. 此时令

$$\delta = 2C\|u_0\|_{\dot{H}^s},\ M = 2C\|u_0\|_{H^s}. \tag{4.3.21}$$

固定上述M,δ之后, 再取

$$2CT^{1-\sigma(n-2s)/4}M^{\sigma} \leqslant 1/2. \tag{4.3.22}$$

则(4.3.18)–(4.3.20)蕴含

$$\|\mathscr{T}u\|_{L^{\gamma(r)}(0,T;\dot{B}^s_{r,2})} \lesssim \delta, \tag{4.3.23}$$

$$\|\mathscr{T}u\|_{L^{\gamma(r)}(0,T;\dot{B}^s_{r,2})} \lesssim M, \tag{4.3.24}$$

$$\|\mathscr{T}u-\mathscr{T}v\|_{L^{\gamma(r)}(0,T;L^r)}\frac{1}{2}\|u-v\|_{L^{\gamma(r)}(0,T;L^r)}. \tag{4.3.25}$$

所以, $\mathscr{T}:(\mathcal{D},d)\to(\mathcal{D},d)$为压缩映射. 故存在$u\in\mathcal{D}$ 满足(4.3.2). 再次使用Strichartz不等式(3.2.22)和(3.2.23), 便有

$$\|u\|_{L^{\gamma(p)}(0,T;\dot{B}^s_{p,2})} \lesssim \|u_0\|_{\dot{H}^s} + T^{1-\sigma(n-2s)/4}\|u\|^{\sigma+1}_{L^{\gamma(r)}(0,T;\dot{B}^s_{r,2})}, \tag{4.3.26}$$

由此不难得到$u\in L^{\gamma(p)}(0,T;B^s_{p,2})$. 用标准的方法, 可以延拓上面的解. 考虑映射

$$\mathscr{T}: u(t)\to S(t-T)u(T) - \mathrm{i}\int_T^t S(t-\tau)f(u(\tau))d\tau, \tag{4.3.27}$$

其中$u(T)$ 为上面得到的解在T处的取值. 注意由$u(T) \in H^s$, 我们可以采用与上面一样的方法解(4.3.27). 这样的步骤可以一直重复下去, 就可以得到存在$T^* > 0$ 满足(4.3.5)–(4.3.8). 解的唯一性的证明与(4.3.20)雷同, 从略.

情形2. $\sigma = 4/(n-2s)$. 注意Strichartz估计(3.2.22), 我们知道

$$\|S(t)u_0\|_{L^{\gamma(r)}(0,T;B^s_{r,2})} \to 0, \ (T \to 0). \tag{4.3.28}$$

可以构造一个度量空间

$$\mathcal{D}_0 = \left\{ u \in L^{\gamma(r)}(0,T;B^s_{r,2}) : \ \|u\|_{L^{\gamma(r)}(0,T;B^s_{r,2})} \leqslant M \right\}, \tag{4.3.29}$$

其上赋度量如(4.3.12). 取$M > 0$适当小, 满足

$$2CM^\sigma \leqslant 1/2. \tag{4.3.30}$$

可以取T满足

$$\|S(t)u_0\|_{L^{\gamma(r)}(0,T;B^s_{r,2})} \leqslant M/2. \tag{4.3.31}$$

从而, 用与上面类似的方法可以证明定理4.3.2的局部适定性. 对小初值的整体适定性, 只要在情形1的证明$(\mathcal{D}, d)$中选取$T = \infty$即可. 事实上, 平行于(4.3.18)–(4.3.20), 有

$$\|\mathscr{T}u\|_{L^{\gamma(r)}(0,\infty;\dot{B}^s_{r,2})} \lesssim \|u_0\|_{\dot{H}^s} + \|u\|^{\sigma+1}_{L^{\gamma(r)}(0,\infty;\dot{B}^s_{r,2})}, \tag{4.3.32}$$

$$\begin{aligned}&\|\mathscr{T}u\|_{L^{\gamma(r)}(0,\infty;B^s_{r,2})}\\ &\lesssim \|u_0\|_{H^s} + \|u\|^\sigma_{L^{\gamma(r)}(0,\infty;\dot{B}^s_{r,2})}\|u\|_{L^{\gamma(r)}(0,\infty;B^s_{r,2})}\end{aligned} \tag{4.3.33}$$

$$\begin{aligned}&\|\mathscr{T}u - \mathscr{T}v\|_{L^{\gamma(r)}(0,\infty;L^r)}\\ &\lesssim (\|u\|^\sigma + \|v\|^\sigma)_{L^{\gamma(r)}(0,\infty;\dot{B}^s_{r,2})}\|u-v\|_{L^{\gamma(r)}(0,\infty;L^r)}.\end{aligned} \tag{4.3.34}$$

此时令

$$\delta = 2C\|u_0\|_{\dot{H}^s} \ll 1, \ M = 2C\|u_0\|_{H^s}, \tag{4.3.35}$$

便可以实现压缩映射的所有条件. □

§4.4 NLS方程的L^2和H^1适定性

我们考虑下面的NLS方程的初值问题:

$$\mathrm{i}u_t + \Delta u = \lambda|u|^\sigma u, \quad u(0,x) = u_0(x), \tag{4.4.1}$$

其中$\lambda \in \mathbb{R}$. 当$\lambda > 0$, 在物理上对应散焦(defocusing) 的情形; 当$\lambda < 0$, 在物理上对应聚焦(focusing) 的情形. 回忆NLS方程的守恒律

$$\|u(t)\|_2^2 = \|u_0\|_2^2, \quad E(u(t)) = E(u_0), \tag{4.4.2}$$

$$E(u(t)) = \frac{1}{2}\|\nabla u(t)\|_2^2 + \frac{2\lambda}{2+\alpha}\|u(t)\|_{2+\alpha}^{2+\alpha}. \tag{4.4.3}$$

从能量守恒律可以很清楚地看到, 聚焦的情况动能部分$\|\nabla u\|_2^2$前的系数是正的, 势能部分$\|u\|_{2+\sigma}^{2+\sigma}$前面的系数是负的. 散焦的情况动能和势能部分前面的系数都是正的. 从而, 散焦的情况是好的情况, 粗略地说来NLS方程的解会有整体适定性; 聚焦的情况是坏的情况, 一般说来解会在有限时间有破裂(blow up) 发生.

定理 4.4.1. 设2^* 由(3.2.20)定义. $0 < \sigma < 4/n$. 若$u_0 \in L^2$, 则(4.4.1)有唯一解

$$u \in C([0,\infty); L^2) \bigcap \left(\bigcap_{2<r\leqslant 2^*,\, r\neq\infty} L_{\mathrm{loc}}^{\gamma(r)}(0,\infty; L^r) \right), \tag{4.4.4}$$

且满足质量守恒$\|u(t)\|^2 = \|u_0\|^2$.

定理 4.4.2. 设2^* 由(3.2.20)定义, $\lambda > 0$, $0 < \sigma < 4/(n-2)$. 若$u_0 \in H^1$, 则(4.4.1)有唯一解

$$u \in C([0,\infty); H^1) \bigcap \left(\bigcap_{2<r\leqslant 2^*,\, r\neq\infty} L_{\mathrm{loc}}^{\gamma(r)}(0,\infty; H_r^1) \right), \tag{4.4.5}$$

且满足质量和能量守恒律(4.4.2).

这两个定理是定理4.3.1和守恒律(4.4.2)的推论. 在定理4.3.1得到局部适定性之后, 用标准的正则化技术可以证明(4.4.1)的解满足守恒律(4.4.2). 再由(4.3.8)得到$T^* = \infty$.

对能量临界的情况$\sigma = 4/(n-2)$, $n \geqslant 3$, 定理4.4.2也是对的, 见后面关于散射算子一章的内容.

§4.5　H^s临界和次临界的NLKG方程

本节我们讨论非线性Klein-Gordon (NLKG) 方程的Cauchy问题:

$$u_{tt} + (m^2 - \Delta)u = f(u), \quad u(0,x) = u_0(x),\ u_t(0,x) = u_1(x). \tag{4.5.1}$$

其中$m^2 > 0$. 本节的主要结果是

定理 4.5.1. 设$n \geqslant 2$, $1/2 \leqslant s < n/2$, $0 < \sigma < 4/(n-2s)$. 假定$f \in C^{[s+1/2]}$ 满足条件

$$|f^{(k)}(u)| \leqslant C|u|^{\sigma+1-k}, \quad k = 0, 1, ..., [s+1/2], \tag{4.5.2}$$

$[s+1/2] \leqslant \sigma+1$. 若$(u_0, u_1) \in H^s \times H^{s-1}$, 则存在$T^* := T^*(\|u_0\|_{H^s}, \|u_1\|_{H^{s-1}}) > 0$ 使得(4.5.1)有唯一解

$$u \in C([0,T^*); H^s) \bigcap \left(\bigcap_{r\in(2,2^*)} L^{\gamma(r)}_{\rm loc}([0,T^*); B^{s-\beta(r)}_{r,2}) \right), \tag{4.5.3}$$

其中$2\beta(r) = (n+1)(1/2 - 1/r)$, $2/\gamma(r) = (n-1)(1/2 - 1/r)$,

$$2^* = \begin{cases} 2(n-1)/(n-3), & n > 3, \\ \infty, & n = 2, 3. \end{cases}$$

进一步, 若$T^* < \infty$, 则有

$$\|u(t)\|_{H^s} \gtrsim (T^* - t)^{-\delta/p}, \quad 0 < t < T^*, \tag{4.5.4}$$

这里, 当$0 < \sigma < 2/(n-2s)$时, $\delta = 1$; 当$2/(n-2s) \leqslant \sigma < 4/(n-2s)$时, $\delta = (4 - \sigma(n-2s))/2$.

定理4.5.1得到H^s解的局部适定性结果, 其中要求σ为H^s次临界增长阶. 如果σ为H^s临界增长阶, 我们可以得到小初值意义下的整体存在性:

定理 4.5.2. 设$n \geqslant 2$, $1/2 \leqslant s < n/2$, $\sigma = 4/(n-2s)$. 假定$f \in C^{[s+1/2]}$ 满足条件(4.5.2), $[s+1/2] \leqslant \sigma + 1$. $(u_0, u_1) \in H^s \times H^{s-1}$, 则存在$T^* := T^*(u_0, u_1) > 0$ 使得(4.5.1)有唯一解u 满足(4.5.3). 若进一步假设$\|(u_0, u_1)\|_{H^s \times H^{s-1}}$适当小, 则上述解是整体解, 即$T^* = \infty$.

当初值属于能量空间时, 我们有

定理 4.5.3. 设$n \geqslant 2$, $0 < \sigma < 4/(n-2)$. 假定$f(u) = |u|^\sigma u$. 若$(u_0, u_1) \in H^1 \times L^2$, 则(4.5.1)有唯一解

$$u \in C([0,\infty); H^1) \bigcap \left(\bigcap_{r\in(2,2^*)} L^{\gamma(r)}_{\rm loc}([0,\infty); B^{s-\beta(r)}_{r,2}) \right), \tag{4.5.5}$$

且满足

$$E(u,u_t) := \frac{1}{2}\|\nabla u\|_2^2 + \frac{m^2}{2}\|u\|_2^2 + \frac{1}{2}\|u_t\|_2^2 + \frac{2}{2+\sigma}\|u\|_{2+\sigma}^{2+\sigma} = E(u_0,u_1). \tag{4.5.6}$$

如果替换H^s, $B^a_{p,2}$为相应的齐次空间$\dot{H}^s$, $\dot{B}^a_{p,2}$, 定理4.5.1和定理4.5.2可以发展到非线性波动(NLW)方程((4.5.1)中$m^2 = 0$)

$$u_{tt} - \Delta u = f(u), \quad u(0,x) = u_0(x),\ u_t(0,x) = u_1(x), \tag{4.5.7}$$

证明也是类似的.

当$n = 1$时, 对NLKG方程, 定理4.5.1–定理4.5.3有类似的结果, 不过在证明中使用的Strichartz估计不同于$n \geqslant 2$; 当$n = 1$, 对NLW方程, 特别是定理4.5.2的对应结果, 本节的讨论方法失效. $\sigma = 4/(n-2)$时大初值有限能量强解的适定性可见本书后面散射算子一章.

定理4.5.1的证明想法. 我们只考虑$2/(n-2s) \leqslant \sigma \leqslant 4/(n-2s)$的情况. 令

$$\rho = \frac{2(n-1)(2+\sigma)}{(n-1)(2+\sigma)+4-2\sigma(n-2s)}.$$

这样选取ρ的目的是为了保证

$$\sigma\left(\frac{1}{\rho} - \frac{s-\beta(\rho)}{n}\right) + \frac{1}{\rho} - \frac{1-2\beta(\rho)}{n} = \frac{1}{\rho'}.$$

根据引理4.2.1, 我们有下面的非线性估计:

$$\|f(u)\|_{\dot{B}^{s-1+\beta(\rho)}_{\rho',2}} \lesssim \|u\|^{\sigma+1}_{\dot{B}^{s-\beta(\rho)}_{\rho,2}}. \tag{4.5.8}$$

考虑(4.5.1)等价的积分方程,

$$u(t) = K'(t)u_0 + K(t)u_1 + \int_0^t K(t-\tau)f(u(\tau))d\tau. \tag{4.5.9}$$

其中$K(t)=(m^2-\Delta)^{-1/2}\sin(m^2-\Delta)^{1/2}$, $K'(t)=\cos(m^2-\Delta)^{1/2}$. 在度量空间

$$\mathcal{D}=\{u\in L^{\gamma(\rho)}(0,T;B^{s-\beta(\rho)}_{\rho,2}):\ \|u\|_{L^{\gamma(\rho)}(0,T;B^{s-\beta(\rho)}_{\rho,2})}\leqslant M\}$$

上, 可以定义度量

$$d(u,v)=\|u-v\|_{L^{\gamma(\rho)}(0,T;L^\rho)}.$$

使用第二章的Strichartz 估计, 结合(4.5.8), 可以证明

$$\mathcal{T}:u(t)\to K'(t)u_0+K(t)u_1+\int_0^t K(t-\tau)f(u(\tau))d\tau \tag{4.5.10}$$

为$(\mathcal{D},d)$到自身的压缩映射. 其余证明略, 见[168, 169]. □

第五章　非线性色散波方程解的低正则性问题

本章主要介绍用于研究非线性色散波方程的Cauchy问题解的低正则性问题的Bourgain空间方法和 I-方法. 所谓低正则性问题, 我们主要从两方面考虑: 第一, 希望在初值具有较低正则性的条件下也能得到方程的局部适定性, 例如假设初值属于Sobolev空间H^s, s越小, 空间正则性越低, 包含的初值越多, 比如Dirac测度–δ函数属于$H^{-1/2-\epsilon}$, $\epsilon > 0$. 第二, 很多色散波方程只有L^2和H^1能量守恒律, 因此对于得到的低正则性的局部解是否能够延拓到整体?

我们主要以Korteweg de-Vries方程、带导数非线性项Schrödinger方程为例, 详细研究非线性色散波方程Cauchy问题解的低正则性问题, 方法具有一般性, 读者需细心体会.

§5.1　Bourgain空间

在这一节, 我们介绍Bourgain空间的一般形式及其基本性质. 具有一般形式的非线性色散波方程的Cauchy问题如下

$$\begin{cases} \partial_t u - i\phi(D)u = f(u, D^\alpha u), & (x,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \\ u(x,0) = u_0(x) \in H^s(\mathbb{R}^n). \end{cases} \tag{5.1.1}$$

其中$u(x,t)$为未知函数, $u_0(x)$为给定的初值函数, $D = \frac{1}{i}(\partial_{x_1}, ..., \partial_{x_n})$, $D^\alpha = (\partial_{x_1}^{\alpha_1}, ..., \partial_{x_n}^{\alpha_n})$, 以及

$$\phi(D)u = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\xi} \phi(\xi) \widehat{u}(\xi) d\xi.$$

这里符号$\phi(\xi)$为连续的实值函数, 称为方程(5.1.1)的色散关系 [1]. 非线性项f表示一个多元函数但不是线性函数, 比如f为多项式或者形如$|u|^p u$.

很多的色散方程可以写成(5.1.1)的形式, 例如Schrödinger方程(对应色散关系为$\phi(\xi) = |\xi|^2$)以及Korteweg de-Vries方程(对应色散关系为$\phi(\xi) = \xi^3$)等. 在前面几章, 我们已经讨论了一些时空框架例如Strichartz型空间$L_t^q L_x^r$, 光滑效应空间$L_x^q L_t^r$等, 在本章我们将应用一类新的时空框架. 同样地, 我们把(5.1.1)看成是线性方程的扰动, 从而首先考虑(5.1.1)对应的线性方程

$$\partial_t u - i\phi(D)u = 0. \tag{5.1.2}$$

[1] 我们强调ϕ必须是实值函数.

我们记$S(t)f = \mathscr{F}_x^{-1} e^{it\phi(\xi)} \mathscr{F}_x f$. 方程(5.1.2)两边关于空间和时间变量同时做Fourier变换得

$$(\tau - \phi(\xi))\widehat{u}(\xi, \tau) = 0. \tag{5.1.3}$$

本章以下若无特别声明, 我们始终用$\widehat{u}$或$\mathscr{F}u$表示函数$u(x,t)$关于x,t的Fourier变换, 用$\mathscr{F}_x u$表示x方向的Fourier变换[2]. 由此知$\widehat{u}$支集在曲面$\{(\xi,\tau) : \tau = \phi(\xi)\}$, 可以想象这一特征曲面与方程(5.1.1)是紧密相关的. 把时间变量t和空间变量x同等对待, 如同Sobolev空间对于Laplace方程一样, 引入与方程(5.1.1)相关的Sobolev型空间$X^{s,b}$.

定义5.1.1. 假设$\phi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$是一个实值的连续函数, 且$s, b \in \mathbb{R}$. 则定义空间$X^{s,b}_{\tau=\phi(\xi)}(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R})$, 简记为$X^{s,b}(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R})$或$X^{s,b}$, 是Schwartz函数空间$\mathcal{S}(\mathbb{R}^{d+1})$在如下范数的完备化

$$\|u\|_{X^{s,b}} = \|\langle\xi\rangle^s \langle\tau - \phi(\xi)\rangle^b \mathcal{F}u\|_{L^2_\xi L^2_\tau}. \tag{5.1.4}$$

$X^{s,b}$结构的这一形式是由R. Beals[6]提出, 之后Bourgain [15, 14]首先系统地应用和研究的, 之后被Kenig, Ponce和Vega [81]以及Tao [151]发展了这些空间上的多线性估计. 比Bourgain 稍早, Klainerman和Machedon [94]在非线性波方程的研究中采用了类似的想法. Bourgain空间能够很好地开发方程(5.1.1)的色散效应, 从而得到比较好的低正则性的结果, 读者可以自己细心体会其妙处. 以非线性项uu_x为例, 这一个方法的核心是如下两个类型的估计:

$$\left\|\psi(t)\int_0^t S(t-s)f(s)ds\right\|_{X^{s,b}} \leqslant C\|f\|_{X^{s,b-1}}, \tag{5.1.5}$$

$$\|\partial_x(uv)\|_{X^{s,b-1}} \leqslant C\|u\|_{X^{s,b}}\|v\|_{X^{s,b}}, \tag{5.1.6}$$

其中$\psi(t)$是光滑的截断函数. 直觉上, 我们可以这样理解, s是空间正则性的指标, b是关于算子$\partial_t - i\phi(D)$的正则性指标. Bourgain空间的优势在于: (5.1.5)式中积分算子$\int_0^t S(t-s)\cdot ds$在Bourgain空间中获得了算子$\partial_t - i\phi(D)$的一阶正则性, 这一阶正则性通过(5.1.6)式补偿了空间正则性的损失. 但是究竟能补偿多少阶导数, 这取决于方程的色散效应的强弱. 我们将证明当$1/2 < b < 1$时, 不等式(5.1.5)对任意的ϕ总是成立的, 因此主要的任务是证明第二个不等式, 关于这个结构的应用可参考文献[81, 153].

[2]如果没有混淆, 当$u_0 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ 只是自变量x 的函数, 我们也用$\widehat{u}_0$表示u_0关于x的Fourier变换.

本节主要证明Bourgain空间$X^{s,b}$的一些基本性质. 定义截断函数$\psi\in C_0^\infty(\mathbb{R})$, 在区间$[-1,1]$上$\psi=1$且$\mathrm{supp}\psi\subset[-2,2]$. 对任何$\delta>0$, 记$\psi_\delta(\cdot)=\psi(\cdot/\delta)$. 我们将要用到如下引理, 关于它的证明可见第三章Besov空间的非线性估计.

引理5.1.2. 如果$0<\alpha<1$, $1<p<\infty$

$$\|(-\Delta)^{\alpha/2}(fg)\|_{L^p}\lesssim\|f\|_{L^\infty}\|(-\Delta)^{\alpha/2}g\|_{L^p}+\|g\|_{L^\infty}\|(-\Delta)^{\alpha/2}f\|_{L^p}. \quad (5.1.7)$$

根据$X^{s,b}$的定义很容易证明

引理5.1.3. 假设$s,b\in\mathbb{R}$. 则有

$$\|f\|_{X^{s,b}}=\big\|\langle\xi\rangle^s\|e^{-it\phi(\xi)}(\mathscr{F}_xf)(\xi,t)\|_{H_t^b}\big\|_{L_\xi^2}.$$

命题5.1.4. 假设$s\in\mathbb{R}$, $1/2<b<b'<1$, $0<\delta<1$. 那么有

$$\|\psi_\delta(t)f\|_{X^{s,b}}\lesssim\delta^{1/2-b}\|f\|_{X^{s,b}},\quad \|\psi_\delta(t)f\|_{X^{s,b-1}}\lesssim\delta^{b'-b}\|f\|_{X^{s,b'-1}}.$$

证明. 不妨假设$s=0$. 由引理5.1.3和引理5.1.2得

$$\begin{aligned}\|\psi_\delta(t)f\|_{X^{0,b}}=&\big\|\|e^{-it\phi(\xi)}\psi_\delta(t)\mathscr{F}_x(f)\|_{H_t^b}\big\|_{L_\xi^2}\\ \lesssim&\big\|\|\psi_\delta(t)\|_{H_t^b}\|e^{-it\phi(\xi)}\mathscr{F}_x(f)(\xi,t)\|_{L_t^\infty}\big\|_{L_\xi^2}\\ &+\big\|\|\psi_\delta(t)\|_{L_t^\infty}\|e^{-it\phi(\xi)}\mathscr{F}_x(f)(\xi,t)\|_{H_t^b}\big\|_{L_\xi^2}\end{aligned}$$

通过简单的计算易知对任何$\lambda>0$有

$$\|f(\lambda t)\|_{\dot H^b}=\lambda^{b-1/2}\|f(t)\|_{\dot H^b},\ \|f(\lambda t)\|_{H^b}\lesssim(\lambda^{1/2}+\lambda^{b-1/2})\|f(t)\|_{H^b}. \quad (5.1.8)$$

利用(5.1.8)和Sobolev嵌入定理$H^b\hookrightarrow L^\infty$, 第一个不等式得证.

下面证明第二个不等式. 简单起见, 令$c=1-b$和$d=1-b'$, 则有$0\leqslant d<c<1/2$. 利用Bourgain空间的等价范数, 只要证明

$$\|\psi_\delta(t)h\|_{H_t^{-c}}\lesssim\delta^{c-d}\|h\|_{H_t^{-d}}.$$

由对偶只需证明

$$\|\psi_\delta(t)g\|_{H_t^d}\lesssim\delta^{c-d}\|g\|_{H_t^c},\quad\forall\ g\in H_t^c. \quad (5.1.9)$$

利用Hölder不等式和Sobolev不等式, 可得

$$\|\psi_\delta(t)g\|_{L_t^2}\lesssim\delta^c\|g\|_{H_t^c}. \tag{5.1.10}$$

则只需证明

$$\|\psi_\delta(t)g\|_{\dot H_t^d}\lesssim\delta^{c-d}\|g\|_{H_t^c}. \tag{5.1.11}$$

由(5.1.10)式和Gagliardo-Nirenberg不等式可得

$$\|\psi_\delta(t)g\|_{\dot H_t^d}\lesssim\|\psi_\delta(t)g\|_{\dot H_t^c}^{1-\theta}\|\psi_\delta(t)g\|_{L_t^2}^{\theta}\lesssim\delta^{c-d}\|\psi_\delta(t)g\|_{\dot H_t^c}^{1-\theta}\|g\|_{H_t^c}^{\theta},$$

其中$\theta=(c-d)/c$, 这样只需证明

$$\|\psi_\delta(t)g\|_{\dot H_t^c}\lesssim\|g\|_{H_t^c}. \tag{5.1.12}$$

事实上,

$$\begin{aligned}\|\psi_\delta(t)g\|_{\dot H_t^c}&\lesssim(\|\psi_\delta\|_{L_t^\infty}\|g\|_{H_t^c}+\|((-\Delta)^{c/2}\psi_\delta)g\|_{L_t^2})\\&\lesssim(\|g\|_{H_t^c}+\|((-\Delta)^{c/2}\psi_\delta)g\|_{L_t^2}).\end{aligned}$$

利用Hölder不等式和Sobolev不等式, 可得

$$\|((-\Delta)^{c/2}\psi_\delta)g\|_{L_t^2}\lesssim\|(-\Delta)^{c/2}\psi_\delta\|_{L^{1/c}}\|g\|_{H_t^c}\lesssim\|g\|_{H_t^c}. \tag{5.1.13}$$

综合上述不等式, 命题得证. □

命题5.1.5. (a) 假设$s\in\mathbb{R}$, $u_0\in H^s(\mathbb{R}^n)$, $1/2<b<1$, $0<\delta<1$. 则有

$$\|\psi_\delta(t)S(t)u_0\|_{X^{s,b}}\lesssim\delta^{1/2-b}\|u_0\|_{H^s}. \tag{5.1.14}$$

(b) 假设$s\in\mathbb{R}$, $f\in X^{s,b-1}$且$1/2<b<1$. 则有

$$\left\|\psi_\delta(t)\int_0^t S(t-t')f(t')\right\|_{X^{s,b}}\lesssim\delta^{1/2-b}\|f\|_{X^{s,b-1}}. \tag{5.1.15}$$

证明. 首先证(a). 根据$X^{s,b}$的等价范数立即有

$$\|\psi_\delta(t)S(t)u_0\|_{X^{s,b}}=\|\psi_\delta(t)\|_{H_t^b}\|u_0\|_{H_x^s}.$$

利用不等式(5.1.8), 得到

$$\|\psi_\delta(t)\|_{H_t^b}\leqslant(\delta^{1/2-b}+\delta^{1/2})\|\psi(t)\|_{H_t^b}\lesssim\delta^{1/2-b}. \tag{5.1.16}$$

从而立即得到(5.1.14).

现在证(b). 根据$X^{s,b}$的等价范数得(5.1.15)式的左边等于

$$\left\|\langle\xi\rangle^s\psi_\delta(t)\int_0^t e^{-it'\phi(\xi)}\mathscr{F}_x(f)(\xi,t')dt'\right\|_{L^2_\xi H^b_t}.$$

从而为证明(b)则只要证明对任何$g\in H_t^{b-1}$有

$$\left\|\psi_\delta(t)\int_0^t g(t')dt'\right\|_{H^b_t}\leqslant C\delta^{1/2-b}\|g\|_{H_t^{b-1}}.$$

令$h(t)=\psi_\delta(t)\displaystyle\int_0^t g(t')dt'$, 直接计算可得

$$h(t)=\psi_\delta(t)\int_0^t\int_{\mathbb{R}}e^{it'\tau}\widehat{g}(\tau)d\tau dt'=\psi_\delta(t)\int_{\mathbb{R}}\frac{e^{it\tau}-1}{i\tau}\widehat{g}(\tau)d\tau.$$

为了估计$\|h(t)\|_{H^b_t}$, 很自然地把h分成两部分, $h(t)=h_1(t)+h_2(t)$, 其中

$$h_1(t)=\psi_\delta(t)\int_{|\tau|\leqslant1}\frac{e^{it\tau}-1}{i\tau}\widehat{g}(\tau)d\tau,\ h_2(t)=\psi_\delta(t)\int_{|\tau|\geqslant1}\frac{e^{it\tau}-1}{i\tau}\widehat{g}(\tau)d\tau.$$

由于$\|t^n\psi_\delta(t)\|_{H^b}=\delta^n\|(t/\delta)^n\psi(t/\delta)\|_{H^b}\leqslant\delta^n\delta^{1/2-b}4^n$, 从而利用Taylor展开式直接计算可得,

$$\begin{aligned}\|h_1\|_{H^b_t}=&\left\|\psi_\delta(t)\int_{|\tau|\leqslant1}\sum_{n\geqslant1}\frac{(it\tau)^n}{n!(i\tau)}\widehat{g}(\tau)d\tau\right\|_{H^b_t}\\ &\lesssim\sum_{n\geqslant1}\frac{\|t^n\psi_\delta(t)\|_{H^b}}{n!}\left|\int_{|\tau|\leqslant1}\frac{(i\tau)^n\widehat{g}(\tau)}{(i\tau)}d\tau\right|\lesssim\|g\|_{H_t^{b-1}}.\end{aligned}\tag{5.1.17}$$

下面估计$\|h_2\|_{H^b_t}$, 将它分为两部分

$$\|h_2\|_{H^b_t}\lesssim\left\|\psi_\delta(t)\int_{|\tau|\geqslant1}\frac{\widehat{g}(\tau)d\tau}{i\tau}\right\|_{H^b_t}+\left\|\psi_\delta(t)\int_{|\tau|\geqslant1}\frac{e^{it\tau}\widehat{g}(\tau)}{i\tau}d\tau\right\|_{H^b_t}:=I+II.$$

对于项I易得

$$I\lesssim\|\psi_\delta\|_{H^b}\|g\|_{H_t^{b-1}}\Big(\int_{|\tau|\geqslant1}\frac{\langle\tau\rangle^{2(1-b)}}{|\tau|^2}d\tau\Big)^{1/2}\lesssim\delta^{1/2-b}\|g\|_{H_t^{b-1}},\tag{5.1.18}$$

对于项II有

$$II=\left\|\psi_\delta(t)\mathscr{F}_t^{-1}\Big(\frac{\chi_{|\tau|\geqslant1}\hat{g}(\tau)}{i\tau}\Big)(t)\right\|_{H^b_t}$$

$$
\begin{aligned}
&\lesssim \|\psi_\delta\|_{H^b}\left\|\mathscr{F}_t^{-1}\left(\frac{\chi_{|\tau|\geqslant 1}\hat{g}(\tau)}{i\tau}\right)\right\|_{L^\infty}+\left\|\psi_\delta\|_{L^\infty}\|\mathscr{F}_t^{-1}\left(\frac{\chi_{|\tau|\geqslant 1}\hat{g}(\tau)}{i\tau}\right)\right\|_{H_t^b}\\
&\lesssim \delta^{1/2-b}\|g\|_{H_t^{b-1}}. \qquad (5.1.19)
\end{aligned}
$$

综合(5.1.17), (5.1.18)和(5.1.19), 当$1/2<b<1$时, 我们得到估计(5.1.15). □

引理5.1.6. 假设Y是时空Banach空间且满足: 对所有的$u_0\in L^2(\mathbb{R}^n)$以及$\tau_0\in\mathbb{R}$都成立

$$\|e^{it\tau_0}S(t)u_0\|_Y\lesssim\|u_0\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}.$$

则当$1/2<b<1$时, 对任何的$u\in X^{0,b}$都有

$$\|u\|_Y\lesssim\|u\|_{X^{0,b}}.$$

证明. 由Fourier逆变换以及坐标变换可得

$$
\begin{aligned}
u(x,t)&=(2\pi)^{-(n+1)/2}\int_{\mathbb{R}^{n+1}}\widehat{u}(\xi,\tau)e^{ix\xi+it\tau}d\xi d\tau\\
&=(2\pi)^{-(n+1)/2}\int_{\mathbb{R}}e^{it\tau}\int_{\mathbb{R}^n}\widehat{u}(\xi,\tau+\phi(\xi))e^{ix\xi}e^{it\phi(\xi)}d\xi d\tau.
\end{aligned}
$$

从而由Minkowski不等式以及对Y的假设条件得

$$\|u\|_Y\lesssim\int_{\mathbb{R}}\|\widehat{u}(\xi,\tau+\phi(\xi))\|_{L^2_\xi}d\tau\lesssim\int_{\mathbb{R}}\langle\tau\rangle^{-b}\|\langle\tau\rangle^b\widehat{u}(\xi,\tau+\phi(\xi))\|_{L^2_\xi}d\tau.$$

由于$b>1/2$以及利用Cauchy-Schwartz不等式, 引理得证. □

当$b=1/2$时, 可以举出反例说明命题5.1.5(b)和引理5.1.6都不成立, 这个问题留给读者去思考. 当$b=1/2$时, $X^{s,b}$有一个很好的代替: Besov-型的Bourgain空间F^s. 我们将在第5.4节用这个空间结构结合一个特殊低频结构来处理KdV方程在$H^{-3/4}$的适定性问题. 现在来介绍F^s空间. 为了方便, 对$k\in\mathbb{N}\cup\{0\}$, 记

$$I_0=[-2,2];\quad I_k=[2^{k-1},2^{k+1}],\ k\geqslant 1. \qquad (5.1.20)$$

假设$\{\varphi_k\}_{k=0}^\infty$是由第1.3节给出的频率空间的非齐次二进制分解函数序列, $\{\Delta_k\}_{k=0}^\infty$是对应的Littlewood-Paley投影算子, 对$k\in\mathbb{N}\cup\{0\}$我们定义频率二进局部化的$X^{s,b}$型赋范空间$X_k(\mathbb{R}^2)$:

$$X_k=\left\{\begin{array}{l} f\in L^2(\mathbb{R}^2):\quad f(\xi,\tau)\ \text{支在}I_k\times\mathbb{R}\ \text{并且}\\ \|f\|_{X_k}=\sum_{j=0}^\infty 2^{j/2}\|\varphi_j(\tau-\phi(\xi))\cdot f(\xi,\tau)\|_{L^2_{\xi,\tau}}<\infty\end{array}\right\}. \qquad (5.1.21)$$

有了这些二进频率上的空间结构, 然后采用Littlewood-Paley方式定义整个频率上的空间:

$$\|u\|_{F^s}^2 = \sum_{k\geqslant 0} 2^{2sk}\|\varphi_k(\xi)\mathscr{F}u\|_{X_k}^2, \tag{5.1.22}$$

$$\|u\|_{N^s}^2 = \sum_{k\geqslant 0} 2^{2sk}\|\langle\tau-\phi(\xi)\rangle^{-1}\varphi_k(\xi)\mathscr{F}u\|_{X_k}^2. \tag{5.1.23}$$

这种l^1-型的$X^{s,b}$结构首先由Tataru [156]引入使用, 后被Ionescu和Kenig[66, 67], Tao[154]以及作者[57, 55, 52, 53]等广泛使用. F^s空间满足$X^{s,1/2+}\subset F^s\subset X^{s,1/2}$, 同时享有$X^{s,1/2+}$和$X^{s,1/2}$的某些性质. 例如一方面它和$X^{s,1/2+}$空间一样能嵌入到很多时空空间如$C(\mathbb{R};H^s)$和Strichartz-型空间$L_t^pL_x^q$, 另一方面, 它关于时间有着与$X^{s,1/2}$空间一样的尺度, 这与Besov空间$B_{2,1}^{n/2}$和Sobolev空间$H^{n/2}$, $H^{n/2+}$的异同是类似的.

首先来看F^s中的线性估计, 我们有

命题5.1.7. (a) *假设$s\in\mathbb{R}$及$u_0\in H^s$. 则*

$$\|\psi(t)S(t)u_0\|_{F^s}\lesssim\|u_0\|_{H^s}. \tag{5.1.24}$$

(b) *假设$s\in\mathbb{R}$, $k\in\mathbb{N}\cup\{0\}$且u满足$\langle\tau-\phi(\xi)\rangle^{-1}\mathscr{F}u\in X_k$. 则存在与$k$无关的常数$C>0$使得*

$$\left\|\mathscr{F}\left[\psi(t)\int_0^t S(t-s)u(s)ds\right]\right\|_{X_k}\leqslant C\|\langle\tau-\phi(\xi)\rangle^{-1}\mathscr{F}u\|_{X_k}. \tag{5.1.25}$$

证明. 首先证(a). 由F^s的定义, 只要证对任何$k\in\mathbb{N}\cup\{0\}$有

$$\|\varphi_k(\xi)\mathscr{F}(\psi(t)S(t)u_0)\|_{X_k}\lesssim\|\varphi_k(\xi)\widehat{u}_0(\xi)\|_{L^2}. \tag{5.1.26}$$

利用X_k的定义可得

$$\begin{aligned}\|\varphi_k(\xi)\mathscr{F}(\psi(t)S(t)u_0)\|_{X_k} &= \sum_{j\geqslant 0}2^{j/2}\|\varphi_k(\xi)\varphi_j(\tau)\widehat{\psi}(\tau)\widehat{u_0}(\xi)\|_{L^2}\\ &\lesssim\|\psi\|_{B_{2,1}^{1/2}}\|\varphi_k(\xi)\widehat{u}_0(\xi)\|_{L^2},\end{aligned}$$

从而(a)得证.

现在证(b). 由直接的计算可以得到

$$\mathscr{F}\left[\psi(t)\int_0^t S(t-s)u(s)ds\right](\xi,\tau)$$

$$= C\int_{\mathbb{R}} \mathscr{F}u(\xi,\tau')\frac{\widehat{\psi}(\tau-\tau')-\widehat{\psi}(\tau-\phi(\xi))}{\tau'-\phi(\xi)}d\tau'.$$

令$f(\xi,\tau') = \mathscr{F}u(\xi,\tau')\langle\tau'-\phi(\xi)\rangle^{-1}$. 对$f_k \in X_k$定义算子$T$如下:

$$T(f_k)(\xi,\tau) = \int_{\mathbb{R}} f_k(\xi,\tau')\frac{\widehat{\psi}(\tau-\tau')-\widehat{\psi}(\tau-\phi(\xi))}{\tau'-\phi(\xi)}\langle\tau'-\phi(\xi)\rangle d\tau',$$

则只需证

$$\|Tf_k\|_{X_k} \leqslant C\|f_k\|_{X_k}$$

对所有的$k \geqslant 0$一致地成立.

设$f_k^\sharp(\xi,\tau) = f_k(\xi,\tau+\phi(\xi))$, $(Tf_k)^\sharp(\xi,\tau) = (Tf_k)(\xi,\tau+\phi(\xi))$. 则利用坐标变换可得

$$(Tf_k)^\sharp(\xi,\tau) = \int_{\mathbb{R}} f_k^\sharp(\xi,\tau')\frac{\widehat{\psi}(\tau-\tau')-\widehat{\psi}(\tau)}{\tau'}\langle\tau'\rangle d\tau'.$$

由于$\widehat{\psi}(\tau)$是Schwartz函数不难验证(分成$|\tau'| \leqslant 1$和$|\tau'| > 1$的情况)

$$\left|\frac{\widehat{\psi}(\tau-\tau')-\widehat{\psi}(\tau)}{\tau'}\langle\tau'\rangle\right| \leqslant C[(1+|\tau|)^{-4}+(1+|\tau-\tau'|)^{-4}].$$

对于$j \in \mathbb{N}\cup\{0\}$, 令$f_{k,j} = f_k(\xi,\tau)\varphi_j(\tau-\phi(\xi))$以及$f_{k,j}^\sharp = f_{k,j}(\xi,\tau+\phi(\xi))$, 从而得

$$\begin{aligned}(Tf_{k,j})^\sharp(\xi,\tau)| \lesssim & (1+|\tau|)^{-4}2^{j/2}\left[\int_{I_j}|f_{k,j}^\sharp(\xi,\tau')|^2 d\tau'\right]^{1/2}\\ & + \sum_{l=-2}^{2}\varphi_{j+l}(\tau)\int_{I_j}|f_{k,j}^\sharp(\xi,\tau')|(1+|\tau-\tau'|)^{-4}d\tau'\\ := & I + II.\end{aligned}$$

因此得

$$\|Tf_k\|_{X_k} \lesssim \sum_{j'\geqslant 0}2^{j'/2}\|\varphi_{j'}(\tau)(Tf_k)^\sharp(\xi,\tau)\|_{L^2} \lesssim \sum_{j',j\geqslant 0}2^{j'/2}\|\varphi_{j'}(\tau)(Tf_{k,j})^\sharp(\xi,\tau)\|_{L^2}.$$

首先考虑包含项I的估计. 显然有

$$\sum_{j',j\geqslant 0}2^{j'/2}\|\varphi_{j'}(\tau)I\|_{L^2} \lesssim \|f_k\|_{X_k}.$$

其次考虑包含II的估计. 利用Young不等式可得

$$\sum_{|j'-j|\lesssim 1} 2^{j'/2}\|\varphi_{j'}(\tau)II\|_{L^2}\lesssim\|f_k\|_{X_k}.$$

从而命题得证 □

对于引理5.1.6在$b=1/2$时我们有下面的结论, 证明类似于引理5.1.6的证明, 从略.

引理5.1.8. 假设Y是时空Banach空间且满足: 对所有的$u_0\in L^2(\mathbb{R}^d)$以及$\tau_0\in\mathbb{R}$都成立

$$\|e^{it\tau_0}S(t)u_0\|_Y\leqslant C\|u_0\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}.$$

则对任何$k\in\mathbb{N}\cup\{0\}$以及$u\in F^0$有

$$\|\Delta_k(u)\|_Y\lesssim\|\widehat{\Delta_k(u)}\|_{X_k}.$$

类似第1.3节中一样, 我们也可以定义一类齐次的Bourgain空间, 或者定义更广的Besov型$X^{s,b}$, 本书不作探讨.

§5.2 局部光滑效应和极大函数估计

在前一节, 我们已经知道Bourgain空间$X^{s,b}$的元素与初值为$u_0\in H^s$的自由解$u=S(t)u_0$比较接近, 因此需要先得到自由解$S(t)u_0$的相关估计. 在研究带导数非线性项的色散波方程时, 局部光滑效应和极大函数估计起着非常重要的作用. 本节以色散群$S^\alpha(t)=\mathscr{F}_x^{-1}e^{it|\xi|^\alpha\xi}\mathscr{F}_x$, $1\leqslant\alpha\leqslant 2$为例, 研究相应的光滑效应估计以及极大函数估计, 这些结果是由Kenig-Ponce-Vega得到的, 本节部分内容可参看[77, 76].

定理 5.2.1. 设$1\leqslant\alpha\leqslant 2$, 则

$$\sup_x\left(\int_{\mathbb{R}}|S^\alpha(t)u_0|^2dt\right)^{1/2}\lesssim\left(\int_{\mathbb{R}}\frac{|\widehat{u_0}(\xi)|^2}{|\xi|^\alpha}d\xi\right)^{1/2}, \tag{5.2.1}$$

$$\left(\int_{\mathbb{R}}\sup_{t\in\mathbb{R}}|S^\alpha(t)u_0|^4dx\right)^{1/4}\lesssim\left(\int_{\mathbb{R}}|\widehat{u_0}(\xi)|^2|\xi|^{1/2}d\xi\right)^{1/2}. \tag{5.2.2}$$

证明. 令$\omega(\xi)=|\xi|^\alpha\xi$, 则知$\omega$是可逆的并记$\omega^{-1}$为其逆函数. 所以作变量替换$\eta=\omega(\xi)$, 则有

$$S^\alpha(t)u_0=C\int_{\mathbb{R}}e^{ix\xi}e^{it\omega(\xi)}\hat{u}_0(\xi)d\xi=C\int_{\mathbb{R}}e^{ix\omega^{-1}(\eta)}e^{it\eta}\frac{\widehat{u}_0(\omega^{-1}(\eta))}{\omega'(\omega^{-1}(\eta))}d\eta.$$

所以利用Plancherel等式, 再作变量替换$\eta=\omega(\xi)$且注意到$\omega'(\xi)=(\alpha+1)|\xi|^{\alpha}$, 则可得

$$\|S^{\alpha}(t)u_0\|_{L_t^2}^2 \lesssim \int_{\mathbb{R}} \frac{|\widehat{u_0}(\omega^{-1}(\eta))|^2}{|\omega'(\omega^{-1}(\eta))|^2} d\eta \lesssim \int_{\mathbb{R}} \frac{|\widehat{u_0}(\xi)|^2}{|\xi|^{\alpha}} d\xi.$$

于是, (5.2.1)式得证.

下面证明(5.2.2)式. 主要的想法是x,t的位置互换, 即把t看成是空间变量, x看成是时间变量, 这样$L_x^4L_t^\infty$变成了Strichartz-型估计, 且$(4,\infty)$是一维Schrödinger方程的容许对. 由第一个式子的证明可知$S^{\alpha}(t)u_0$可以看成色散关系为$\omega^{-1}(\eta)$, 且初值的Fourier变换为$\frac{\widehat{u_0}(\omega^{-1}(\eta))}{\omega'(\omega^{-1}(\eta))}$的方程的自由解. 不难验证$\omega^{-1}(\xi)$满足第2.1节中的条件(H1), (H2), (H3), (H4)且$m_1=m_2=\alpha_1=\alpha_2=1/(\alpha+1)$, 所以利用第2.2节中Strichartz估计的推导方法可得

$$\|\mathscr{F}_x^{-1} e^{it\omega^{-1}(\xi)} \mathscr{F}_x f\|_{L_t^4 L_x^\infty} \lesssim \|f\|_{\dot{H}^{\frac{1}{2}-\frac{1}{4(\alpha+1)}}}.$$

由此可得

$$\|S^{\alpha}(t)u_0\|_{L_x^4L_t^\infty} \lesssim \left(\int_{\mathbb{R}} \left| |\eta|^{\frac{1}{2}-\frac{1}{4(\alpha+1)}} \frac{\hat{u}_0(\omega^{-1}(\eta)}{\omega'(\omega^{-1}(\eta))} \right|^2 d\eta \right)^{1/2}.$$

在上式中作变量替换$\eta=\omega(\xi)$可得

$$\|S^{\alpha}(t)u_0\|_{L_x^4L_t^\infty} \lesssim \|u_0\|_{\dot{H}^{1/4}}.$$

所以(5.2.2)式得证. □

这里给出的方法是针对特殊的色散群简化后的, 在文[76]中, Kenig, Ponce和Vega对一类更广的色散关系$\omega(\xi)$证明了定理5.2.1, 并且有更为精确的估计

$$\left(\int_{\mathbb{R}} \sup_{t\in\mathbb{R}} |S(t)u_0(x)|^4 dx \right)^{\frac{1}{4}} \lesssim \left(\int_{\mathbb{R}} |\widehat{u_0}(\xi)|^2 \left(\frac{\omega'(\xi)}{\omega''(\xi)} \right)^{1/2} d\xi \right)^{1/2}.$$

下面我们给出色散群$S^{\alpha}(t)$的另一个极大函数估计, 是由[77]得到的.

定理 5.2.2. 设$s>\frac{\alpha+1}{4}$, $\alpha\geqslant 1$, $u_0\in H^s$时, 则有

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} \sup_{t\in[-T,T]} |S^{\alpha}(t)u_0|^2 dx \right)^{1/2} \leqslant C\|u_0\|_{H^s}, \tag{5.2.3}$$

其中常数$C>0$依赖于T.

为证定理5.2.2, 我们先证明如下引理.

引理5.2.3. 设φ为支在$[2^{k-1}, 2^{k+1}]$上的C^∞函数, $k \in \mathbb{N}$. 对$\alpha \geqslant 1$, 定义函数$H_k^\alpha(\cdot)$如下

$$H_k^\alpha(x) = \begin{cases} 2^k, & |x| \leqslant 1, \\ 2^{k/2}|x|^{-1/2}, & 1 \leqslant |x| \leqslant C2^{\alpha k}, \\ 1/(1+x^2), & |x| > C2^{\alpha k}. \end{cases}$$

那么, 当$|t| \leqslant 2$时存在与x, t和k无关的常数使得

$$\left| \int_{\mathbb{R}} e^{i(t|\xi|^\alpha \xi + x\xi)} \varphi(\xi) d\xi \right| \leqslant C H_k^\alpha(x). \tag{5.2.4}$$

此外, 若$k = 0$, φ是支在$[-2, 2]$的光滑函数, 则同样的结论成立.

证明. 令$u(x,t) = \int_{\mathbb{R}} e^{i(t|\xi|^\alpha \xi + x\xi)} \varphi(\xi) d\xi$. 根据$\varphi$的支集条件可得对所有$x, t \in \mathbb{R}$有

$$|u(x,t)| \leqslant C2^k.$$

从而只需再考虑$|x| \geqslant 1$的情形.

假设$k = 0$. 利用分部积分且$|t| \leqslant 2$可得到

$$|u(x,t)| \lesssim \left| \int_{\mathbb{R}} x^{-2} e^{ix\xi} \frac{d^2}{d\xi^2} \left(e^{i(t|\xi|^\alpha \xi)} \varphi(\xi) \right) d\xi \right| \lesssim |x|^{-2}.$$

从而只需再考虑$k \geqslant 1$的情形.

定义集合$\Omega = \{\xi \in \operatorname{supp} \varphi : |(\alpha+1)t|\xi|^\alpha + x| \leqslant |x|/2\}$. 选紧支集在$\Omega$上的截断函数$\zeta \in C^\infty$, 使得当$|(\alpha+1)t|\xi|^\alpha + x| \leqslant |x|/3$时, $\zeta = 1$, 例如可令

$$\zeta = \eta \left(\frac{(\alpha+1)t|\xi|^\alpha + x}{|x|} \right),$$

其中η是固定的光滑截断函数.

因为$|t| \leqslant 2$, 如果$\xi \in \Omega$时, 则有$|x| \sim \alpha t|\xi|^\alpha \leqslant C2^{\alpha k}$, 从而函数$h(\xi, x) = t\xi|\xi|^\alpha + x\xi$满足

$$|h''(\xi)| = Ct|\xi|^{\alpha-1} \geqslant C2^{-k}|x|.$$

由Van der Corput引理可得

$$\left| \int e^{ih(\xi,x)} \varphi(\xi) \zeta d\xi \right| \leqslant C2^{k/2}|x|^{-1/2}.$$

如果$\xi \in \operatorname{supp}(1-\zeta)$, 那么有$|h'(\xi)| = |(\alpha+1)t|\xi|^\alpha + x| \geqslant |x|/3$. 利用分部积分, 可以得出当$|x| \geqslant 1$时, 有

$$\left|\int e^{ih(\xi,x)}(1-\zeta)\varphi(\xi)d\xi\right| \leqslant \frac{C}{1+x^2}.$$

综合上述的估计, 引理得证. □

利用上述引理, 我们可以证明如下引理, 从而立即推出定理5.2.2.

引理5.2.4. 如果$s > \frac{1+\alpha}{4}$, $\alpha \geqslant 1$, 那么有

$$\Big(\sum_{j=-\infty}^{\infty} \sup_{|t|\leqslant 1} \sup_{j<x<j+1} |S^\alpha(t)u_0|^2\Big)^{1/2} \leqslant C\|u_0\|_{H^s}. \tag{5.2.5}$$

证明. 定义$S_k^\alpha(t)u_0 = \mathscr{F}_x^{-1}e^{it\xi|\xi|^\alpha}\varphi_k(\xi)\mathscr{F}_x u_0$, 其中$\{\varphi_k\}_{k=0}^\infty$是频率空间非齐次二进分解序列. 我们只需要证明

$$\Big(\sum_{j=-\infty}^{\infty} \sup_{|t|\leqslant 1} \sup_{j<x<j+1} |S_k^\alpha(t)u_0|^2\Big)^{1/2} \lesssim 2^{\frac{(1+\alpha)k}{4}}\|u_0\|_{L^2}.$$

利用对偶理论, 只要证明

$$\Big\|\int_{-1}^{1} S_k^\alpha(t)g(\cdot,t)dt\Big\|_{L^2} \lesssim 2^{\frac{(1+\alpha)k}{4}}\Big[\sum_{j=-\infty}^{\infty}\Big(\int_{-1}^{1}\int_j^{j+1}|g(x,t)|dxdt\Big)^2\Big]^{1/2}. \tag{5.2.6}$$

由对偶关系(如可见P. Tomas的对偶理论[159]), (5.2.6)是如下估计的推论:

$$\begin{aligned}
&\Big(\sum_{j=-\infty}^{\infty} \sup_{|t|\leqslant 1} \sup_{j<x<j+1} \Big|\int_{-1}^{1} S_k^\alpha(t-t')g(\cdot,t')dt'\Big|^2\Big)^{1/2} \\
\lesssim\, & 2^{\frac{(1+\alpha)k}{2}}\Big[\sum_{j=-\infty}^{\infty}\Big(\int_{-1}^{1}\int_j^{j+1}|g(x,t)|dxdt\Big)^2\Big]^{1/2}.
\end{aligned} \tag{5.2.7}$$

为了证明(5.2.7), 利用引理5.2.3可得

$$\begin{aligned}
\Big|\int_{-1}^{1} S_k^\alpha(t-t')g(x,t')dt'\Big| &\lesssim \int H_k^\alpha(y)\int_{-1}^{1}|g(x-y,t')|dt'dy \\
&\lesssim \sum_{l=-\infty}^{\infty} H_k^\alpha(l)\int_l^{l+1}\int_{-1}^{1}|g(x-y,t')|dt'dy.
\end{aligned}$$

这样(5.2.7)的左边小于等于

$$\Big[\sum_{j=-\infty}^{\infty}\Big(\sup_{j\leqslant x<j+1}\sum_{l=-\infty}^{\infty}H_k^{\alpha}(l)\int_l^{l+1}\int_{-1}^{1}|g(x-y,t')|dt'dy\Big)^2\Big]^{1/2} \tag{5.2.8}$$

作变量替换可得

$$(5.2.8)\lesssim\Big[\sum_{j=-\infty}^{\infty}\Big(\sum_{l=-\infty}^{\infty}H_k^{\alpha}(l)\int_{l-j-1}^{l-j+2}\int_{-1}^{1}|g(z,t')|dt'dz\Big)^2\Big]^{1/2}.$$

再利用Minkowski不等式得

$$\begin{aligned}(5.2.8)\lesssim&\sum_{l=-\infty}^{\infty}H_k^{\alpha}(l)\Big[\sum_{j=-\infty}^{\infty}\Big(\int_{l-j-1}^{l-j+2}\int_{-1}^{1}|g(z,t')|dt'dz\Big)^2\Big]^{1/2}\\ \lesssim&\sum_{l=-\infty}^{\infty}H_k^{\alpha}(l)\Big[\sum_{j=-\infty}^{\infty}\Big(\int_{j}^{j+1}\int_{-1}^{1}|g(x,t')|dt'dx\Big)^2\Big]^{1/2}\\ \lesssim&2^{\frac{(\alpha+1)k}{2}}\Big[\sum_{j=-\infty}^{\infty}\Big(\int_{-1}^{1}\int_{j}^{j+1}|g(x,t')|dxdt'\Big)^2\Big]^{1/2},\end{aligned}$$

上式最后一个不等式中我们利用了如下简单的事实:

$$\sum_{l=1}^{[2^{\alpha k}]}l^{-1/2}\lesssim\sum_{l=1}^{[2^{\alpha k}]}\int_l^{l+1}x^{-1/2}dx\lesssim2^{\alpha k/2}.$$

于是, 引理得证. □

与色散方程相关的极大函数估计最早是由Carleson[21]提出的. 我们以Schrödinger方程为例,

$$\begin{cases}iu_t+\Delta u=0,\\ u(x,0)=u_0(x).\end{cases}$$

由Plancherel等式可知, 当$t\to0$时, 方程的解$u=e^{it\Delta}u_0\to u_0$在H^s的范数意义下. Carleson提出了如下的问题: 什么条件下, $t\to0$时对几乎处处的x都有解$u(x,t)\to u_0(x)$? 为了回答这一问题他进一步提出如下问题: 为保证极大函数$\sup_{|t|\leqslant1}|e^{it\Delta}u_0(x)|$是局部可积的, 所需要初值$u_0\in H^s$的最小的$s$是多少?

这一问题在一维时已经完全解答, 但在高维时仍有许多公开问题, 例如一个普遍的猜测是: 对任意的维数, u几乎处处收敛到u_0的充分必要条件是$s\geqslant1/4$. 对于一维的情形, 我们已经知道若$s>1/2$

$$\|e^{it\partial_{xx}}u_0\|_{L_x^2L_{|t|\leqslant1}^{\infty}}\lesssim\|u_0\|_{H^s},$$

Kenig和Vega的一个猜测是上述估计在$s = 1/2$也成立. 事实上, 我们已经证明当$s = 1/2$时把$\|u\|_{H^s}$换成$B^s_{2,1}$, 上述估计是成立的. 关于这些问题可以参考文献[76, 77].

§5.3　KdV方程的双线性估计及局部适定性

本节考虑Korteweg-de Vries (KdV)方程, 证明$X^{s,b}$中的双线性估计并由此得到KdV方程的局部适定性理论. KdV方程具有如下的形式:

$$\begin{cases} \partial_t u + \partial_x^3 u + 6u\partial_x u = 0, \ (x,t) \in \mathbb{R}^2, \\ u(x,0) = u_0(x) \in H^s(\mathbb{R}). \end{cases} \tag{5.3.1}$$

易知KdV方程的色散关系为$\phi(\xi) = \xi^3$. KdV方程是浅水波理论最基本的方程, 早在1834年, Scott Russell就发现了KdV方程的孤立波解. 下面是Russell对自己观察发现的描述:

我观察一条船的运动, 这条船沿着狭窄的河道迅速前进, 突然船停了. 河道的水被船体带动, 聚集在船头剧烈扰动着, 然后水浪中浮出一个圆滚平滑、轮廓分明的巨大孤立波峰, 以巨大的速度向前滚动, 急速离开了船头, 我骑马紧跟着观察, 它以每小时9英里的速度滚滚向前, 并保持长30英尺, 高1.5英尺的原始形状. 渐渐地, 一二英里之后, 消失在透迤的河道.

60年之后(1895年), 荷兰数学家Korteweg指导他的学生de Vries在博士论文中提出了KdV方程模型, 得到了广泛且深入的研究. 根据在第5.1节中的讨论可知, 用Bourgain空间$X^{s,b}$作为工作空间研究方程(5.3.1), 主要的任务是去做相应的双线性估计. 我们首先证明

定理 5.3.1. *如果*$-3/4 < s < -1/2$, *则存在*$b \in (1/2, 1)$, *对任意的*$b' \in (1/2, b]$, *且满足*$b - b' \leqslant \min\{-s - 1/2, 1/4 + s/3\}$, *则有*

$$\|\partial_x(u_1u_2)\|_{X^{s,b-1}} \leqslant C\|u_1\|_{X^{s,b'}}\|u_2\|_{X^{s,b'}}. \tag{5.3.2}$$

这里我们采取$[k; Z]$乘子的想法来证明定理5.3.1, 这种方法具有一般性且使得这种双线性估计变得程序化. 根据$X^{s,b}$的定义, (5.3.2)等价于

$$\|\langle\xi\rangle^s\langle\tau - \xi^3\rangle^{b-1}\xi(\widehat{u} * \widehat{v})(\xi,\tau)\|_{L^2_{\xi,\tau}} \lesssim \|\langle\xi\rangle^s\langle\tau - \xi^3\rangle^{b'}\widehat{u}\|_{L^2_{\xi,\tau}}\|\langle\xi\rangle^s\langle\tau - \xi^3\rangle^{b'}\widehat{v}\|_{L^2_{\xi,\tau}}.$$

为叙述简单, 我们记

$$\Lambda_{s,b}(\xi,\tau) = \langle\xi\rangle^s\langle\tau - \xi^3\rangle^b.$$

进一步, (5.3.2)等价于

$$\left\|\xi\Lambda_{s,b-1}(\xi,\tau)[(\Lambda_{s,b}^{-1}u)*(\Lambda_{s,b}^{-1}v)](\xi,\tau)\right\|_{L^2_{\xi,\tau}}\lesssim\|u\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}\|v\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}. \quad (5.3.3)$$

设$\{\varphi_k\}_{k=0}^\infty(\{\chi_k\}_{k=-\infty}^\infty)$是频率空间的非齐次(齐次)二进分解函数序列, 区间序列$\{I_k\}_{k=0}^\infty$ 由(5.1.20)给出. 对ξ_i, $\tau_i-\xi_i^3$都作二进制分解, 由对偶上式等价于

$$\sum_{k_i\in\mathbb{Z},j_i\in\mathbb{Z}_+,}\frac{\langle 2^{k_3}\rangle^s 2^{j_3(b-1)}2^{k_3}}{\langle 2^{k_1}\rangle^s 2^{j_1b'}\langle 2^{k_2}\rangle^s 2^{j_2b'}}$$
$$\times\int[1_{D_{k_3,j_3}}(u_{k_1,j_1}*v_{k_2,j_2})f](\xi,\tau)d\xi d\tau\lesssim\|u\|_{L^2}\|v\|_{L^2}\|f\|_{L^2}, \quad (5.3.4)$$

其中$L^2=L^2(\mathbb{R}^2)$, 对$k\in\mathbb{Z}, j\in\mathbb{Z}_+$我们记

$$D_{k,j}=\{(\xi,\tau):\xi\in[2^{k-1},2^{k+1}],\tau-\xi^3\in I_j\},$$

以及

$$u_{k_1,j_1}=\chi_{k_1}(\xi)\varphi_{j_1}(\tau-\xi^3)u.$$

因此为证明定理5.3.1, 则需要先估计

$$\left|\int_{\mathbb{R}^2}1_{D_{k_3,j_3}}(\xi,\tau)(u_{k_1,j_1}*v_{k_2,j_2})\cdot f d\xi d\tau\right|.$$

做到这一步之后, 问题转化成一个非常初等的积分控制问题. 我们可以把它写成对称性的形式, 上面积分的估计可以转化成下面的三线性估计,

$$\int_{\Gamma_3}f_1(\xi_1,\tau_1)f_2(\xi_2,\tau_2)f_3(\xi_3,\tau_3)\lesssim C(k_i,j_i)\prod_{i=1}^3\|f_i\|_{L^2}. \quad (5.3.5)$$

其中f_i是支在D_{k_i,j_i}的非负函数, 以及

$$\Gamma_3=\{\xi_1+\xi_2+\xi_3=0,\ \tau_1+\tau_2+\tau_3=0\},$$

且赋予Γ_3诱导的测度[3]. 形如(5.3.5)的估计, 最初由Bourgain [14, 15]利用时空范数与$X^{s,b}$的关系给出一些估计, 后由Kenig, Ponce, Vega [81]采用了初等的微积分方法给出了精细的估计方法, Tao [151]利用二进制分解对这一类型的估计做了系统的研究.

在下个引理中我们将系统研究(5.3.5)的估计, 对于更广的一类色散关系如$\phi(\xi)=|\xi|^\alpha\xi$可参考Guo的文章[53]. 我们这里的证明是改造了的Tao [151]中

[3] $\int_{\Gamma_3}\Pi_{i=1,2,3}f_i(\xi_i,\tau_i)=\int_{\mathbb{R}^4}f_1(\xi_1,\tau_1)f_2(\xi_2,\tau_2)f_3(-\xi_1-\xi_2,-\tau_1-\tau_2)d\xi_1 d\xi_2 d\tau_1 d\tau_2$.

的$[k;Z]$-乘子的想法, 方法比较初等, 但是比较繁琐. 建议读者不要陷入琐碎的计算技巧而忽略了关键想法. 这里的方法具有一般性, 能对一类色散方程都适用. 为了表述方便, 对于三个实数a_1, a_2, a_3, 我们用$a_{min} \leqslant a_{med} \leqslant a_{max}$分别表示$a_1, a_2, a_3$中最小,中间和最大的数. 以下为了方便, 我们总是记

$$(f_1 * f_2) \cdot f_3 = f_1 * f_2 \cdot f_3.$$

引理5.3.2. 设$k_i \in \mathbb{Z}$, $j_i \in \mathbb{Z}_+$, $N_i = 2^{k_i}$, 以及$f_{k_i,j_i} \in L^2(\mathbb{R}^2)$是非负函数支在$\cup_{l=0}^{j_i} D_{k_i,l}$且$\|f_{k_i,j_i}\|_2 \leqslant 1$, $i = 1, 2, 3$. 则

(a) 对任意的$k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{Z}$以及$j_1, j_2, j_3 \in \mathbb{Z}_+$, 有

$$\int_{\mathbb{R}^2} f_{k_1,j_1} * f_{k_2,j_2} \cdot f_{k_3,j_3} d\xi d\tau \leqslant C 2^{j_{min}/2} 2^{k_{min}/2}. \tag{5.3.6}$$

(b) 如果$N_{min} \ll N_{med} \sim N_{max}$, 则对$i = 1, 2, 3$都有

$$\int_{\mathbb{R}^2} f_{k_1,j_1} * f_{k_2,j_2} \cdot f_{k_3,j_3} d\xi d\tau \leqslant C 2^{(j_1+j_2+j_3)/2} 2^{-k_{max}/2} 2^{-(j_i+k_i)/2}. \tag{5.3.7}$$

(c) 如果$N_{min} \sim N_{med} \sim N_{max} \gg 1$, 则

$$\int_{\mathbb{R}^2} f_{k_1,j_1} * f_{k_2,j_2} \cdot f_{k_3,j_3} d\xi d\tau \leqslant C 2^{j_{min}/2} 2^{j_{med}/4} 2^{-k_{max}/4}. \tag{5.3.8}$$

证明. 对于$f, g, h \in L^2(\mathbb{R}^2)$, 令$J(f, g, h) = \int_{\mathbb{R}^2} f * g \cdot h d\xi d\tau$. 通过简单的坐标变换, 可得

$$|J(f, g, h)| = |J(g, f, h)| = |J(\widetilde{f}, h, g)| = |J(f, \widetilde{g}, h)|,$$

其中$\widetilde{f}(\xi, \mu) = f(-\xi, -\mu)$. 注意到函数$\phi(\xi) = \xi^3$是奇函数[4], 因此$\widetilde{f}_{k_i,j_i}$与$f_{k_i,j_i}$拥有同样的支集. 利用Cauchy-Schwartz不等式和函数f_{k_i,j_i}的支集性质得到

$$\begin{aligned}
&J(f_{k_1,j_1}, f_{k_2,j_2}, f_{k_3,j_3}) \\
\lesssim & 2^{j_{min}/2} \int_{\mathbb{R}^2} \|f_{k_1,j_1}(\xi_1, \cdot)\|_{L^2_\tau} \|f_{k_2,j_2}(\xi_2, \cdot)\|_{L^2_\tau} \|f_{k_3,j_3}(\xi_1+\xi_2, \cdot)\|_{L^2_\tau} d\xi_1 d\xi_2 \\
\lesssim & 2^{k_{min}/2} 2^{j_{min}/2} \prod_{i=1}^{3} \|f_{k_i,j_i}\|_{L^2},
\end{aligned}$$

[4] 对于偶函数的情形，没有这样的对称性，故需要讨论的情形多些，但是仍然用本文的方法可以处理.

即(a)得证.

对于(b), 根据函数f_{k_i,j_i}的支集性质可知要使$J(f_{k_1,j_1},f_{k_2,j_2},f_{k_3,j_3})\neq 0$必须满足

$$|k_{max}-k_{med}|\leqslant 5. \tag{5.3.9}$$

根据对称性我们可以假设$k_1\leqslant k_2\leqslant k_3$, 从而有$|k_2-k_3|\leqslant 5$, 分三种情形讨论: $j_1=j_{max}, j_2=j_{max}, j_3=j_{max}$. 如果$j_3=j_{max}$, 将$J(f_{k_1,j_1},f_{k_2,j_2},f_{k_3,j_3})$重新写成如下形式:

$$\begin{aligned}&J(f_{k_1,j_1},f_{k_2,j_2},f_{k_3,j_3})\\&=\int_{\mathbb{R}^4}f^\sharp_{k_1,j_1}(\xi_1,\tau_1)f^\sharp_{k_2,j_2}(\xi_2,\tau_2)f^\sharp_{k_3,j_3}(\xi_1+\xi_2,\tau_1+\tau_2+\Omega(\xi_1,\xi_2))d\xi_1d\xi_2d\tau_1d\tau_2,\end{aligned}$$

其中$f^\sharp_{k_i,j_i}(\xi,\tau)=f_{k_i,j_i}(\xi,\tau+\xi^3)$, $i=1,2,3$, 以及

$$\Omega(\xi_1,\xi_2)=\xi_1^3+\xi_2^3-(\xi_1+\xi_2)^3=-3\xi_1\xi_2(\xi_1+\xi_2).$$

做变量替换$\xi_2'=\xi_1+\xi_2$, 然后使用Hölder不等式,

$$\begin{aligned}&J(f_{k_1,j_1},f_{k_2,j_2},f_{k_3,j_3})\\&\quad=\int_{\mathbb{R}^4}f^\sharp_{k_1,j_1}(\xi_1,\tau_1)f^\sharp_{k_2,j_2}(\xi_2-\xi_1,\tau_2)\\&\qquad\times f^\sharp_{k_3,j_3}(\xi_2,\tau_1+\tau_2+\Omega(\xi_1,\xi_2-\xi_1))d\xi_1d\xi_2d\tau_1d\tau_2\\&\quad\lesssim\int_{\mathbb{R}^2}\|f^\sharp_{k_1,j_1}(\cdot,\tau_1)\|_{L^2(\mathbb{R})}\|f^\sharp_{k_2,j_2}(\cdot,\tau_2)\|_{L^2(\mathbb{R})}\\&\qquad\times\|f^\sharp_{k_3,j_3}(\xi_2,\tau_1+\tau_2+\Omega(\xi_1,\xi_2-\xi_1))\|_{L^2(|\xi_i|\sim N_i,\,i=1,2)}d\tau_1d\tau_2.\end{aligned} \tag{5.3.10}$$

做变量替换$\mu_2=\tau_1+\tau_2+\Omega(\xi_1,\xi_2-\xi_1)$, 注意$\left|\partial_{\xi_1}\left[\Omega(\xi_1,\xi_2-\xi_1)\right]\right|\sim N_2^2$, 有

$$\|f^\sharp_{k_3,j_3}(\xi_2,\tau_1+\tau_2+\Omega(\xi_1,\xi_2-\xi_1))\|_{L^2(|\xi_i|\sim N_i,\,i=1,2)}\lesssim N_2^{-1}\|f^\sharp_{k_3,j_3}\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}. \tag{5.3.11}$$

由(5.3.10)和(5.3.11), 结合Hölder不等式,

$$J(f_{k_1,j_1},f_{k_2,j_2},f_{k_3,j_3})\lesssim 2^{-k_3}\prod_{i=1}^3\|f_{k_i,j_i}\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}.$$

如果$j_2=j_{max}$, 由对称性知这一情形与情形$j_3=j_{max}$是一样的. 如果$j_1=j_{max}$, 根据对称性,

$$J(f_{k_1,j_1},f_{k_2,j_2},f_{k_3,j_3})$$

$$= \int_{\mathbb{R}^4} f^{\sharp}_{k_1,j_1}(\xi_1, \tau_2 + \tau_3 + \Omega(\xi_2, \xi_1 - \xi_2)) f^{\sharp}_{k_2,j_2}(\xi_2, \tau_2) f^{\sharp}_{k_3,j_3}(\xi_1 - \xi_2, \tau_3),$$

注意$\left|\partial_{\xi_2}\left[\Omega(\xi_2, \xi_1 - \xi_2)\right]\right| \sim N_2 N_1$, 重复上述讨论可得

$$J(f_{k_1,j_1}, f_{k_2,j_2}, f_{k_3,j_3}) \lesssim 2^{-(k_1+k_3)/2} \prod_{i=1}^{3} \|f_{k_i,j_i}\|_{L^2(\mathbb{R}^2)},$$

(b)得证.

现在证明(c). 为了符号的简单, 简记$f_i = f^{\sharp}_{k_i,j_i}$, $i = 1, 2, 3$. 根据对称性可以假设$j_1 \leqslant j_2 \leqslant j_3$, 将$J(f_1, f_2, f_3)$重新写成如下形式

$$\int_{\mathbb{R}^4} f_1(\xi_1, \mu_1) f_2(\xi_2 - \xi_1, \mu_2 - \mu_1 - \xi_1^3 - (\xi_2 - \xi_1)^3) f_3(\xi_2, \mu_2 - \xi_2^3) d\xi_1 d\mu_1 d\xi_2 d\mu_2.$$

利用Cauchy-Schwartz不等式可得$J(f_1, f_2, f_3)$小于等于

$$\left\| \int_{\mathbb{R}^2} f_1(\xi_1, \mu_1) f_2(\xi_2 - \xi_1, \mu_2 - \mu_1 - \xi_1^3 - (\xi_2 - \xi_1)^3) d\xi_1 d\mu_1 \right\|_{L^2_{\xi_2,\mu_2}} \cdot \|f_3\|_{L^2}.$$

上式$L^2_{\xi_2,\mu_2}$范数中的积分区域为

$$E = \{(\xi_1, \mu_1) : |\mu_1| \lesssim 2^{j_1}, \xi_1^3 + (\xi_2 - \xi_1)^3 = \mu_2 - \mu_1 + O(2^{j_2})\},$$

其中$|\xi_2| \sim 2^{k_2}$. 因为$\xi_1^3 + (\xi_2 - \xi_1)^3 = 3\xi_2(\xi_1 - \xi_2/2)^2 + \xi_2^3/4$, 从而

$$3\xi_2(\xi_1 - \xi_2/2)^2 + \xi_2^3/4 - \mu_2 + \mu_1 = O(2^{j_2}),$$

进一步, 当$\xi_2^3/4 - \mu_2 + \mu_1 \geqslant 0$可得

$$|\xi_1 - \xi_2/2| \lesssim 2^{(j_2-k_2)/2},$$

或者, 当$\xi_2^3/4 - \mu_2 + \mu_1 > 0$, 可有对某个$\theta > 0$,

$$(\xi_1 - \xi_2/2 + \theta)(\xi_1 - \xi_2/2 - \theta) = O(2^{j_2-k_2}),$$

此时也有$|\xi_1 - \xi_2/2 + \theta| \lesssim 2^{(j_2-k_2)/2}$ 或$|\xi_1 - \xi_2/2 - \theta| \lesssim 2^{(j_2-k_2)/2}$. 从而无论哪种情形, 总有$|E| \lesssim 2^{j_1} 2^{(j_2-k_2)/2}$. 所以由Cauchy-Schwartz不等式得

$$\begin{aligned} &J(f_1, f_2, f_3) \\ &\lesssim 2^{j_1/2} 2^{(j_2-k_2)/4} \|f_1(\xi_1, \mu_1) f_2(\xi_2 - \xi_1, \mu_2 - \mu_1 - \xi_1^3 - (\xi_2 - \xi_1)^3)\|_{L^2_{\xi_2,\mu_2,\xi_1,\mu_1}} \\ &\lesssim 2^{j_1/2} 2^{(j_2-k_2)/4}, \end{aligned}$$

此即(c), 从而引理得证. □

有了这个引理, 现在我们可以证明定理5.3.1. 为了便于读者理解定理5.3.1中的条件是如何要求的, 我们在证明中分情况讨论, 对每种情况都有一个条件, 然后对所有的条件取一个交集即可.

定理5.3.1的证明. 由前面讨论知只需证(5.3.4). 不妨设$\|u\|_2 = \|v\|_2 = 1$. 从而只要证

$$\sup_{k_{max}\geqslant 1} \sum_{k_{min}\leqslant k_{max}, j_i\in\mathbb{Z}_+,} \frac{\langle 2^{k_3}\rangle^s 2^{j_3(b-1)} 2^{k_3}}{\langle 2^{k_1}\rangle^s 2^{j_1 b'} \langle 2^{k_2}\rangle^s 2^{j_2 b'}} \left\| 1_{D_{k_3,j_3}} \cdot u_{k_1,j_1} * v_{k_2,j_2} \right\|_{L^2_{\xi,\tau}} \tag{5.3.12}$$

是有界的. 这是因为根据函数u_{k_1,j_1}, v_{k_2,j_2}的支集性质可知要使$1_{D_{k_3,j_3}} \cdot u_{k_1,j_1} * v_{k_2,j_2}$不恒为0, 则必须满足

$$|k_{max} - k_{med}| \leqslant 5,\ 2^{j_{max}} \sim \max(2^{j_{med}}, 2^{k_1+k_2+k_3}). \tag{5.3.13}$$

从而可以假设(5.3.12)中有(5.3.13). 现在我们假设(5.3.12)成立来推导(5.3.4). 把(5.3.4)左边项求和分成几个部分, 例如不妨设k_2, k_3是最大的和第二大的, 且$k_2, k_3 \geqslant 1$(否则利用以下证明中的情形1易得), 则利用(5.3.12)得到

$$\begin{aligned}
&\sum_{|k_2-k_3|\leqslant 5, j_i\in\mathbb{Z}_+,} \frac{\langle 2^{k_3}\rangle^s 2^{j_3(b-1)} 2^{k_3}}{\langle 2^{k_1}\rangle^s 2^{j_1 b'} \langle 2^{k_2}\rangle^s 2^{j_2 b'}} \int [1_{D_{k_3,j_3}}(u_{k_1,j_1} * v_{k_2,j_2}) f](\xi,\tau) d\xi d\tau \\
\lesssim &\sum_{|k_2-k_3|\leqslant 5} \|u\|_{L^2} \|\Delta_{k_2} v\|_{L^2} \|\Delta_{k_3} f\|_{L^2} \lesssim \|u\|_{L^2} \|v\|_{L^2} \|f\|_{L^2},
\end{aligned}$$

即(5.3.4)得证. 我们接下来按频率之间大小关系分情况讨论(5.3.12), 我们固定k_{max}, 因此下面的求和中$\sum_{k_i\in\mathbb{Z}}$表示$\sum_{k_{min}\in\mathbb{Z}}$.

情形1(低低频相互作用): $k_{max} \leqslant 100$. 利用引理5.3.2 (a)容易得

$$(5.3.12) \lesssim \sum_{k_i\in\mathbb{Z}, j_i\in\mathbb{Z}_+} \frac{\langle 2^{k_3}\rangle^s 2^{j_3(b-1)} 2^{k_3}}{\langle 2^{k_1}\rangle^s 2^{j_1 b'} \langle 2^{k_2}\rangle^s 2^{j_2 b'}} 2^{j_{min}/2} 2^{k_{min}/2} \lesssim 1.$$

情形2(高低频相互作用): $k_2 \geqslant 100, |k_3 - k_2| \leqslant 5, k_1 \leqslant k_2 - 10$(或者$k_1$和$k_2$位置互换). 继续分情况, 如果$j_3 = j_{max}$, 则利用引理5.3.2 (b)

$$(5.3.12) \lesssim \sum_{k_i\in\mathbb{Z}, j_i\in\mathbb{Z}_+} \frac{2^{j_3(b-1)} 2^{k_3}}{\langle 2^{k_1}\rangle^s 2^{j_1 b'} 2^{j_2 b'}} \min(2^{(j_1+j_2)/2} 2^{-k_2}, 2^{j_1/2} 2^{k_1/2}).$$

把求和分成三部分, 第一部分是$k_1 \leqslant -2k_2$, 记为I, 第二部分是$k_1 \geqslant -2k_2$且$2^{k_1/2} \leqslant 2^{j_2/2-k_2}$, 记为II, 第三部分是$k_1 \geqslant -2k_2$且$2^{k_1/2} > 2^{j_2/2-k_2}$, 记为III. 对于第一

部分易得$I\lesssim 1$. 对于第II项, 先对j_1, j_2, j_3求和则得

$$II\lesssim \sum_{-2k_2\leqslant k_1\leqslant k_2} \frac{2^{(k_1+2k_2)(b-1)}}{\langle 2^{k_1}\rangle^s}.$$

从而再分$k_1\geqslant 1$和$k_1\leqslant 1$来处理, 可得如果$1+s<b\leqslant 1+s/3$则有$II\lesssim 1$. 对于第三部分同样有

$$III\lesssim \sum_{-2k_2\leqslant k_1\leqslant k_2} \frac{2^{(k_1+2k_2)(b-1)}}{\langle 2^{k_1}\rangle^s}.$$

从而得如果$1+s<b\leqslant 1+s/3$则有$III\lesssim 1$.

如果$j_2=j_{max}$, 则利用引理5.3.2 (b)类似之前的分析得如果$0\leqslant b-b'\leqslant 1/2+\frac{s}{3}$

$$(5.3.12)\lesssim \sum_{k_i\in\mathbb{Z}, j_i\in\mathbb{Z}_+} \frac{2^{j_3(b-1)}2^{k_3}}{\langle 2^{k_1}\rangle^s 2^{j_1 b'}2^{j_2 b'}} \min(2^{(j_1+j_3)/2}2^{-k_2}, 2^{j_1/2}2^{k_1/2})\lesssim 1.$$

如果$j_1=j_{max}$, 则利用引理5.3.2 (b)类似可得如果$0\leqslant b-b'\leqslant 1/4$

$$(5.3.12)\lesssim \sum_{k_i\in\mathbb{Z}, j_i\in\mathbb{Z}_+} \frac{2^{j_3(b-1)}2^{k_3}}{\langle 2^{k_1}\rangle^s 2^{j_1 b'}2^{j_2 b'}} \min(2^{(j_2+j_3)/2}2^{-(k_2+k_1)/2}, 2^{j_2/2}2^{k_1/2})\lesssim 1.$$

情形3(高低频相互作用II): $k_2\geqslant 100, |k_3-k_2|\leqslant 10, k_1\geqslant k_2-10$. 利用引理5.3.2 (c)类似情形2的分析得如果$s>-3/4, 1/2<b<3/4+s/3$

$$(5.3.12)\lesssim \sum_{k_i\in\mathbb{Z}, j_i\in\mathbb{Z}_+,} \frac{2^{j_{max}(b-1)}2^{k_3(1-s)}2^{j_{min}/2}2^{j_{med}/4}}{2^{j_{min}b'}2^{j_{med}b'}2^{k_{max}/4}}\lesssim \sum_{k\geqslant 1} 2^{k(3/4-s+3(b-1))}\lesssim 1.$$

情形4(高高频相互作用): $k_2\geqslant 100, |k_1-k_2|\leqslant 5, k_3\leqslant k_2-10$. 如果$j_3=j_{max}$, 利用引理5.3.2 (c)类似情形2的分析得如果$1/2<b<\frac{5}{4}+s$

$$\begin{aligned}(5.3.12) &\lesssim \sum_{k_i\in\mathbb{Z}, j_i\in\mathbb{Z}_+} \frac{\langle 2^{k_3}\rangle^s 2^{j_3(b-1)}2^{k_3}}{\langle 2^{k_1}\rangle^s 2^{j_1 b'}\langle 2^{k_2}\rangle^s 2^{j_2 b'}} 2^{(j_1+j_2)/2}2^{-k_1/2}2^{-k_3/2}\\ &\lesssim \sum_{k_i\in\mathbb{Z}} \frac{\langle 2^{k_3}\rangle^s \max(1, 2^{k_3+2k_1})^{b-1}2^{k_3/2}}{2^{2sk_1}2^{k_1/2}}\lesssim 1. \end{aligned} \tag{5.3.14}$$

如果$j_1=j_{max}$, 利用引理5.3.2 (c)类似情形2的分析得如果$b-b'\leqslant -1/2-s$

$$(5.3.12) \lesssim \sum_{k_i\in\mathbb{Z}, j_i\in\mathbb{Z}_+} \frac{\langle 2^{k_3}\rangle^s 2^{j_3(b-1)}2^{k_3}}{\langle 2^{k_1}\rangle^s 2^{j_1 b'}\langle 2^{k_2}\rangle^s 2^{j_2 b'}} 2^{(j_2+j_3)/2}2^{-k_1}$$

$$\lesssim \sum_{k_i\in\mathbb{Z}} \frac{\langle 2^{k_3}\rangle^s \max(1,2^{k_3+2k_1})^{b-b'-1/2}2^{k_3-k_1}}{2^{2sk_1}} \lesssim 1. \quad (5.3.15)$$

如果$j_2=j_{max}$, 根据对称性, 这与$j_1=j_{max}$是一样的.

综合上述所有的条件可得我们证明了: 如果$s\in(-3/4,-1/2)$, $1/2<b<3/4+s/3$, $1/2<b'\leqslant b$满足$b-b'\leqslant -1/2-s$, 则(5.3.2)成立. 从而定理5.3.1得证. □

对于s较大的情形, 也有相应的估计. 事实上, 读者可以用上面的方法证明如下定理. 对$a\in\mathbb{R}$, 我们用$a+$表示$a+\epsilon$对任意固定的$0<\epsilon\ll 1$.

定理 5.3.3. *如果$-3/4<s\leqslant 0$, 则存在$b\in(1/2,1)$使得*

$$\|\partial_x(u_1u_2)\|_{X^{s,b-1}}\leqslant C\|u_1\|_{X^{s,b}}\|u_2\|_{X^{s,b}}. \quad (5.3.16)$$

以及

$$\|\partial_x(u_1u_2)\|_{X^{s,b-1}}\lesssim\|u_1\|_{X^{-3/4+,b}}\|u_2\|_{X^{s,b}}+\|u_1\|_{X^{s,b}}\|u_2\|_{X^{-3/4+,b}}. \quad (5.3.17)$$

注记5.3.4. 定理5.3.3的条件$s>-3/4$是必要的. 当$s<-3/4$时, Kenig, Ponce和Vega[81]证明了(5.3.16)对任意的$b\in\mathbb{R}$不成立. 当$s=-3/4$时同样的结论由Nakanishi, Takaoka和Tsutsumi[123]证明.

接下来我们用得到的双线性估计来证明KdV方程的局部适定性理论. 首先假设初始值$u_0\in H^s$, $-3/4<s<-1/2$, 定义如下算子和集合

$$\Phi_{u_0}(u)=\psi_1(t)S(t)u_0-\psi_1(t)\int_0^t S(t-t')\psi_T(t')\partial_x(u^2)(t')dt',$$

$$\mathcal{B}=\{u\in X^{s,b}:\|u\|_{X^{s,b}}\leqslant 2C\|u_0\|_{H^s}\}.$$

下面证明只要选取T适当小, 映射Φ_{u_0}在$\mathcal{B}$上是压缩映射.

由命题5.1.5, 命题5.1.4和定理5.3.1, 对$1/2<b<b'<1$有

$$\begin{aligned}\|\Phi_{u_0}(u)\|_{X^{s,b}}\leqslant& C\|u_0\|_{H^s}+CT^{b'-b}\|u\|^2_{X^{s,b}}\\ \leqslant& C\|u_0\|_{H^s}+4C^2T^{b'-b}\|u_0\|^2_{H^s}.\end{aligned}$$

因此, 如果选定T使得

$$4CT^{b'-b}\|u_0\|_{H^s}\leqslant 1/2,$$

则有$\Phi_{u_0}(\mathcal{B}) \subset \mathcal{B}$. 假设$(u_1, u_2) \in \mathcal{B}$, 类似与上述讨论, 我们得到

$$\|\Phi_{u_0}(u_1) - \Phi_{u_0}(u_2)\|_{X^{s,b}} \leqslant 1/2\|u_1 - u_2\|_{X^{s,b}}.$$

因此, Φ_{u_0}是$\mathcal{B}$ 上的压缩映射. 根据压缩映射原理可得Φ_{u_0}在$\mathcal{B}$中有唯一的不动点$u \in \mathcal{B}$

$$u(t) = \psi_1(t)S(t)u_0 - \psi_1(t)\int_0^t S(t-t')\psi_T(t')\partial_x(u^2)(t')dt'.$$

从而知当限制在$t \in [-T, T]$时有

$$u(t) = S(t)u_0 - \int_0^t S(t-t')\partial_x(u^2)(t')dt',$$

从而u是KdV方程(5.3.1)在$[-T, T]$的解且$u \in X_T^{s,b}$, 其中$X_T^{s,b}$如下定义:

$$\|u\|_{X_T^{s,b}} = \inf\{\|\widetilde{u}\|_{X^{s,b}} : \widetilde{u}(t) = u(t)\text{当}t \in [-T, T]\}.$$

接下来采用[110]中的办法来证明在$X_T^{s,b}$中u是KdV方程的唯一解. 假设$u_1, u_2 \in X_T^{s,b}$都是KdV方程的解且具有同样的初值u_0, 我们将证明$u_1(t) = u_2(t)$, $t \in [-T, T]$. 根据对称性, 我们只需要证明$u_1(t) = u_2(t)$, $t \in [0, T]$. 对$\delta > 0$, 其中δ待定, 对$i = 1, 2$, 定义$\widetilde{u_i}$如下

$$\widetilde{u_i} = \begin{cases} u_i(t),\ t \in [0, \delta], \\ u_i(2\delta - t),\ t \in [\delta, 2\delta], \\ u_0,\ \text{其余}. \end{cases} \tag{5.3.18}$$

所以可知$t \to \widetilde{u_i}(t)$是连续的, 且$\psi(t)\widetilde{u_i}(t) \in X^{s,b}$, $\widetilde{u}_1(t) - \widetilde{u}_2(t) = 0$当$t \in \mathbb{R}/[0, 2\delta]$.

因为u_1, u_2是方程的解, 所以当$t \in [0, \delta]$时有

$$u_1(t) - u_2(t) = -\psi_1(t)\int_0^t S(t-t')\psi_\delta(t')\partial_x[(\widetilde{u}_1 - \widetilde{u}_2)(u_1 + u_2)](t')dt'.$$

对$T > 0$定义

$$\|u\|_{X_{T+}^{s,b}} = \inf\{\|\widetilde{u}\|_{X^{s,b}} : \widetilde{u}(t) = u(t)\text{当}t \in [0, T]\}.$$

所以由命题5.1.5, 命题5.1.4和定理5.3.1得

$$\|u_1 - u_2\|_{X_{\delta+}^{s,b}} \leqslant \delta^{b'-b}(\|u\|_{X_T^{s,b}} + \|v\|_{X_T^{s,b}})\|\widetilde{u}_1 - \widetilde{u}_2\|_{X^{s,b}}.$$

由构造可知

$$\|\widetilde{u}_1-\widetilde{u}_2\|_{X^{s,b}}\leqslant 2\|u_1-u_2\|_{X^{s,b}_{\delta+}},$$

从而得

$$\|u_1-u_2\|_{X^{s,b}_{\delta+}}\leqslant C\delta^{b'-b}(\|u\|_{X^{s,b}_T}+\|v\|_{X^{s,b}_T})\|u_1-u_2\|_{X^{s,b}_{\delta+}}.$$

选取δ使得$C\delta^{b'-b}(\|u\|_{X^{s,b}_T}+\|v\|_{X^{s,b}_T})<1/2$, 我们得到$u_1(t)=u_2(t)$当$t\in[0,\delta]$. 重复此过程, 我们得到了$[0,T]$上的唯一性.

对于s大的情形, 我们可以利用KdV方程的一个尺度变换不变性. 容易验证KdV方程(5.3.1)在如下变换下不变: 对任意的$\lambda>0$

$$u(x,t)\to\lambda^2u(\lambda x,\lambda^3t),\ \ u_0(x)\to\lambda^2u_0(\lambda x). \tag{5.3.19}$$

从而$\dot{H}^{-3/2}$是临界空间在下述意义: $\|\lambda^2u_0(\lambda\cdot)\|_{\dot{H}^{-3/2}}=\|u_0\|_{\dot{H}^{-3/2}}$. 由事实

$$\|\lambda^2u_0(\lambda x)\|_{H^{-3/4+}}\lesssim\lambda^{\frac{3}{2}+}\|u_0\|_{H^{-3/4+}}+\lambda^{3/4+}\|u_0\|_{H^{-3/4+}},$$

从而选取λ足够小, 我们可以假设

$$\|\phi\|_{H^{-3/4+}}\leqslant\epsilon_0\ll 1. \tag{5.3.20}$$

剩下的论述与$-3/4<s<-1/2$时的情形类似, 留给读者思考. 所以我们证明了如下定理

定理 5.3.5. *设$s\in(-3/4,0]$, $u_0\in H^s$, 则存在$T=T(\|u_0\|_{H^{-3/4+}})>0$以及$b>1/2$, KdV方程(5.3.1)有唯一的解$u(x,t)\in X^{s,b}_T\subset C([-T,T];H^s)$. 此外, $\forall\ R>0$, 映射$u_0\to u(t)$是$\{\phi\in H^s,\|\phi\|_{H^s}\leqslant R\}$到$C([-T,T];H^s)$Lipschitz连续的.*

§5.4 KdV方程在$H^{-3/4}$的局部适定性

在前一节我们主要研究了当$s>-3/4$时Korteweg-de Vries方程在H^s的局部适定性, 现在知核心的双线性估计在$s\leqslant-3/4$时是不成立的, 事实上KdV方程在$s<-3/4$时是不适定的(解映射不再是局部一致连续的)[25, 84]. 因此一个自然的问题是在$s=-3/4$时KdV方程是否局部适定, 这是本节的主要内容, 这里的结果是由[55]得到的.

我们首先考虑一个$X^{s,b}$中的双线性估计的端点情形: $b=1/2$. 在第5.1节中, 我们已经介绍了当$b=1/2$时, $X^{s,b}$有一个很好的代替F^s(这一节我们同样固定$\phi(\xi)=\xi^3$), 因此是否能在F^s中有双线性估计, 即如下类型的估计:

$$\|\partial_x(uv)\|_{N^s} \leqslant C(\|u\|_{F^s}\|v\|_{F^s}+\|v\|_{F^s}\|u\|_{F^s}). \tag{5.4.1}$$

根据空间F^s和N^s的定义, 为得到双线性估计(5.4.1), 必须首先得到频率二进局部化后的估计

$$\|\langle\tau-\xi^3\rangle^{-1}\varphi_{k_3}(\xi)\xi(\widehat{\Delta_{k_1}u}*\widehat{\Delta_{k_2}v})\|_{X_{k_3}} \leqslant C(k_1,k_2,k_3)\cdot\|\widehat{\Delta_{k_1}u}\|_{X_{k_1}}\|\widehat{\Delta_{k_2}v}\|_{X_{k_2}}.$$

根据支集性质, 要使$\varphi_{k_3}(\xi)(\widehat{\Delta_{k_1}u}*\widehat{\Delta_{k_2}v})$不恒为0, k_1,k_2,k_3必须满足

$$|\max(k_1,k_2,k_3)-\mathrm{med}(k_1,k_2,k_3)|\leqslant 5.$$

依据k_1,k_2,k_3之间的大小关系, 可将频率的相互作用分成以下几种情形: 高×低→高, 低×高→高, 高×高→低, 高×高→高, 低×低→低. 首先对每个情形得到相应的估计.

利用引理5.1.8, 定理5.2.1和引理5.2.4的证明, 可得如下命题.

命题5.4.1. 设$k\in\mathbb{Z}_+$, $j\in\mathbb{N}$, $I\subset\mathbb{R}$且$|I|\lesssim 1$, 则

$$\begin{aligned}
\|\Delta_k(u)\|_{L_t^\infty L_x^2}&\lesssim\|\mathscr{F}[\Delta_k(u)]\|_{X_k},\\
\|\Delta_k(u)\|_{L_x^2 L_{t\in I}^\infty}&\lesssim 2^{3k/4}\|\mathscr{F}[\Delta_k(u)]\|_{X_k},\\
\|\Delta_k(u)\|_{L_x^4 L_t^\infty}&\lesssim 2^{k/4}\|\mathscr{F}[\Delta_k(u)]\|_{X_k},\\
\|\Delta_j(u)\|_{L_x^\infty L_t^2}&\lesssim 2^{-j}\|\mathscr{F}[\Delta_j(u)]\|_{X_j}.
\end{aligned}$$

现在我们来依次处理频率相互作用的不同情形. 对于双线性估计, 对应三个频率相互作用, 从而相对简单, 对于高次线性估计, 情形更多一些, 但是这里的方法很容易推广过去, 例如可见[52]. 读者在阅读中应注意把握分情况讨论的基本想法.

命题5.4.2. (a) 如果$k\geqslant 10$, $|k-k_2|\leqslant 5$, 则

$$\|\langle\tau-\xi^3\rangle^{-1}\varphi_k(\xi)\xi(\widehat{\Delta_0 u}*\widehat{\Delta_{k_2}v})\|_{X_k}\lesssim\|\widehat{\Delta_0 v}\|_{X_0}\|\widehat{\Delta_{k_2}v}\|_{X_{k_2}}. \tag{5.4.2}$$

(b) 如果$k\geqslant 10$, $|k-k_2|\leqslant 5$且$1\leqslant k_1\leqslant k-9$, 则

$$\|\langle\tau-\xi^3\rangle^{-1}\varphi_k(\xi)\xi(\widehat{\Delta_{k_1}u}*\widehat{\Delta_{k_2}v})\|_{X_k}\lesssim k^3 2^{-k/2-k_1}\|\widehat{\Delta_{k_1}u}\|_{X_{k_1}}\|\widehat{\Delta_{k_2}v}\|_{X_{k_2}}. \tag{5.4.3}$$

证明. 为了符号的简单起见, 在证明中假设$k=k_2$. 本节总假定

$$u_{k,j}=\varphi_k(\xi)\varphi_j(\tau-\xi^3)\widehat{u}.$$

首先证明(a). 由X_k的定义可得

$$\|\langle\tau-\xi^3\rangle^{-1}\varphi_k(\xi)\xi(\widehat{\Delta_0 u}*\widehat{\Delta_k v})\|_{X_k}\lesssim 2^k\sum_{j,j_1,j_2\geqslant 0}2^{-j/2}\|1_{D_{k,j}}(u_{0,j_1}*v_{k,j_2})\|_2.$$

类似与引理5.3.2(b)的证明可得

$$\|1_{D_{k,j}}(u_{0,j_1}*v_{k,j_2})\|_2\lesssim 2^{-k}2^{(j_1+j_2)/2}\|u_{0,j_1}\|_2\|v_{k,j_2}\|_2.$$

因此有

$$\begin{aligned}\|\langle\tau-\xi^3\rangle^{-1}\varphi_k(\xi)\xi(\widehat{\Delta_0 u}*\widehat{\Delta_k v})\|_{X_k}&\lesssim 2^k\sum_{j,j_1,j_2\geqslant 0}2^{-j/2}\|1_{D_{k,j}}(u_{0,j_1}*v_{k,j_2})\|_2\\&\lesssim\|\widehat{\Delta_0 v}\|_{X_0}\|\widehat{\Delta_{k_2} v}\|_{X_{k_2}}.\end{aligned}$$

因此(a)得证.

对于(b), 同样利用X_k的定义可得

$$\|\langle\tau-\xi^3\rangle^{-1}\varphi_k(\xi)\xi(\widehat{\Delta_{k_1} u}*\widehat{\Delta_k v})\|_{X_k}\lesssim 2^k\sum_{j_i\geqslant 0}2^{-j_3/2}\|1_{D_{k,j_3}}\cdot(u_{k_1,j_1}*v_{k,j_2})\|_2. \tag{5.4.4}$$

由支集性质知可以假设在(5.4.4)的右边项的求和中有$j_{max}\geqslant 2k+k_1-10$. 同样可以假设在求和中有$j_1,j_2,j_3\leqslant 10k$, 否则可以利用引理5.3.2(a)可立即得到. 利用引理5.3.2(b)可得

$$\begin{aligned}&2^k\sum_{j_3,j_1,j_2\geqslant 0}2^{-j_3/2}\|1_{D_{k,j}}(u_{k_1,j_1}*v_{k,j_2})\|_2\\&\lesssim 2^k\sum_{j_3,j_1,j_2\geqslant 0}2^{-j/2}2^{j_{min}/2}2^{-k/2}2^{-k_1/2}2^{j_{med}/2}\|u_{k_1,j_1}\|_2\|v_{k,j_2}\|_2\\&\lesssim 2^k\sum_{j_{max}\geqslant 2k+k_1-10}k^3 2^{-k/2}2^{-k_1/2}2^{-j_{max}/2}\|\widehat{\Delta_{k_1} u}\|_{X_{k_1}}\|\widehat{\Delta_k v}\|_{X_k}\\&\lesssim k^3 2^{-k/2}2^{-k_1}\|\widehat{\Delta_{k_1} u}\|_{X_{k_1}}\|\widehat{\Delta_k v}\|_{X_k},\end{aligned}$$

因此, 命题得证. □

当低频与高频大小相当时, 我们有

命题5.4.3. 如果$k \geqslant 10$, $|k-k_2| \leqslant 5$以及$k-9 \leqslant k_1 \leqslant k+10$, 则有

$$\|\langle \tau-\xi^3\rangle^{-1}\varphi_{k_1}(\xi)\xi(\widehat{\Delta_k u} * \widehat{\Delta_{k_2} v})\|_{X_{k_1}} \lesssim 2^{-3k/4}\|\widehat{\Delta_k u}\|_{X_k}\|\widehat{\Delta_{k_2} v}\|_{X_{k_2}}. \quad (5.4.5)$$

证明. 类似于命题5.4.2的证明, 我们假设$k=k_2$且由X_{k_1}的定义得

$$\|\langle \tau-\xi^3\rangle^{-1}\varphi_{k_1}(\xi)\xi(\widehat{\Delta_k u} * \widehat{\Delta_k v})\|_{X_{k_1}} \lesssim 2^{k_1}\sum_{j_i \geqslant 0} 2^{-\frac{j_1}{2}}\|1_{D_{k_1,j_1}}(u_{k,j_2} * v_{k,j_3})\|_2. \quad (5.4.6)$$

由函数的支集性质知可以假设在求和中有$j_{max} \geqslant 3k-20$, 象前面一样我们也可以假设$j_1, j_2, j_3 \leqslant 10k$. 利用引理5.3.2(c)可得

$$\begin{aligned}
&2^{k_1}\sum_{j_1,j_2,j_3 \geqslant 0} 2^{-j_1/2}\|1_{D_{k_1,j_1}}(u_{k,j_2} * v_{k,j_3})\|_2 \\
&\lesssim \Big(\sum_{j_1=j_{max}} + \sum_{j_2=j_{max}} + \sum_{j_3=j_{max}}\Big) 2^{-j_1/2}2^{3k/4}2^{j_{min}/2}2^{j_{med}/4}\|u_{k,j_2}\|_2\|v_{k,j_3}\|_2 \\
&:= I + II + III.
\end{aligned}$$

对于I项, 很容易控制, 这里不详叙述. 由对称性, 剩下只要控制II, 将它分成两部分得到

$$\begin{aligned}
II \lesssim &\Big(\sum_{j_2=j_{max}, j_1 \leqslant j_3} + \sum_{j_2=j_{max}, j_1 \geqslant j_3}\Big) 2^{-j_1/2}2^{3k/4}2^{j_{min}/2}2^{j_{med}/4}\|u_{k,j_2}\|_2\|v_{k,j_3}\|_2 \\
:= &II_1 + II_2.
\end{aligned}$$

对于II_1, 先对j_1求和可得

$$\begin{aligned}
II_1 \lesssim &\sum_{j_2=j_{max}, j_1 \leqslant j_3} 2^{-j_1/2}2^{3k/4}2^{j_1/2}2^{j_3/4}\|u_{k,j_2}\|_2\|v_{k,j_3}\|_2 \\
\lesssim &\sum_{j_2 \geqslant 3k-20, j_3 \geqslant 0} 2^{3k/4}2^{j_3/2}\|u_{k,j_2}\|_2\|v_{k,j_3}\|_2 \\
\lesssim &2^{-3k/4}\|\widehat{\Delta_k u}\|_{X_k}\|\widehat{\Delta_{k_2} v}\|_{X_{k_2}}.
\end{aligned}$$

对于II_2有

$$\begin{aligned}
II_2 \lesssim &\sum_{j_2=j_{max}, j_1 \geqslant j_3} 2^{-j_1/2}2^{3k/4}2^{j_3/2}2^{j_1/4}\|u_{k,j_2}\|_2\|v_{k,j_3}\|_2 \\
\lesssim &2^{-3k/4}\|\widehat{\Delta_k u}\|_{X_k}\|\widehat{\Delta_{k_2} v}\|_{X_{k_2}}.
\end{aligned}$$

因此, 命题得证. □

接下来考虑低低频相互作用. 一般而言, 这个相互作用在多数情形(如果初值空间为H^s)都是容易控制的.

命题5.4.4. 如果$0 \leqslant k_1, k_2, k_3 \leqslant 100$, 则

$$\|\langle\tau-\xi^3\rangle^{-1}\varphi_{k_1}(\xi)\xi(\widehat{\Delta_{k_2}u}*\widehat{\Delta_{k_3}v})\|_{X_{k_1}} \lesssim \|\widehat{\Delta_{k_2}u}\|_{X_{k_2}}\|\widehat{\Delta_{k_3}v}\|_{X_{k_3}}. \tag{5.4.7}$$

证明. 由X_{k_1}的定义可得

$$\|\langle\tau-\xi^3\rangle^{-1}\varphi_{k_1}(\xi)\xi(\widehat{\Delta_{k_2}u}*\widehat{\Delta_{k_3}v})\|_{X_{k_1}} \lesssim 2^{k_1}\sum_{j_i\geqslant 0}2^{-j_1/2}\|1_{D_{k_1,j_1}}(u_{k_2,j_2}*v_{k_3,j_3})\|_2.$$

由函数的支集性质知要使$1_{D_{k_1,j}}(u_{k_2,j_1}*v_{k_3,j_2})$不恒为0必须满足$|j_{max}-j_{med}| \leqslant 10$或者$j_{max} \leqslant 1000$. 由引理5.3.2(a)立即得

$$\|\langle\tau-\xi^3\rangle^{-1}\varphi_{k_1}(\xi)\xi(\widehat{\Delta_{k_2}u}*\widehat{\Delta_{k_3}v})\|_{X_{k_1}} \lesssim \|\widehat{\Delta_{k_2}u}\|_{X_{k_2}}\|\widehat{\Delta_{k_3}v}\|_{X_{k_3}},$$

因此命题得证. □

对于低频的相互作用, 事实上我们很容易可以证明一个更强的结论.

命题5.4.5. 如果$0 \leqslant k_1, k_2, k_3 \leqslant 100$, 则有

$$\|\langle\tau-\xi^3\rangle^{-1}\varphi_{k_1}(\xi)\xi\big(\mathscr{F}[\psi(t)\Delta_{k_2}u]*\widehat{\Delta_{k_3}v}\big)\|_{X_{k_1}} \lesssim \|\Delta_{k_2}u\|_{L_t^\infty L_x^2}\|\Delta_{k_3}v\|_{L_t^\infty L_x^2}.$$

证明. 由X_{k_1}的定义, Plancherel等式以及Bernstein不等式得到

$$\begin{aligned}&\|\langle\tau-\xi^3\rangle^{-1}\varphi_{k_1}(\xi)\xi(\mathscr{F}[\psi(t)\Delta_{k_2}u]*\widehat{\Delta_{k_3}v})\|_{X_{k_1}}\\ &\lesssim 2^{k_1}\sum_{j_3\geqslant 0}2^{-j_3/2}\|\psi(t)\Delta_{k_2}u\cdot\Delta_{k_3}v\|_{L_t^2L_x^2} \lesssim \|\Delta_{k_2}u\|_{L_t^\infty L_x^2}\|\Delta_{k_3}v\|_{L_t^\infty L_x^2},\end{aligned}$$

因此命题得证. □

最后一个情形是高高频相互作用. 容易看出这个情形在负正则性的问题中是比较坏的, 因为$s<0$时如果u, v集中在很高的频率则$\|u\|_{F^s}, \|v\|_{F^s}$都很小.

命题5.4.6. (a) 如果$k \geqslant 10$且$|k-k_2| \leqslant 5$, 则有

$$\|\langle\tau-\xi^3\rangle^{-1}\varphi_0(\xi)\xi(\widehat{\Delta_k u}*\widehat{\Delta_{k_2}v})\|_{X_0} \lesssim k2^{-3k/2}\|\widehat{\Delta_k u}\|_{X_k}\|\widehat{\Delta_{k_2}v}\|_{X_{k_2}}.$$

(b) 如果$k \geqslant 10$, $|k-k_2| \leqslant 5$, 以及$1 \leqslant k_1 \leqslant k-9$, 则有

$$\|\langle\tau-\xi^3\rangle^{-1}\varphi_{k_1}(\xi)\xi(\widehat{\Delta_k u}*\widehat{\Delta_{k_2}v})\|_{X_{k_1}} \lesssim (2^{-\frac{3k}{2}}+k2^{-2k+\frac{k_1}{2}})\|\widehat{\Delta_k u}\|_{X_k}\|\widehat{\Delta_{k_2}v}\|_{X_{k_2}}.$$

证明. 首先证(a). 不妨假设$k=k_2$且由定义知要证明的不等式的左边项小于等于

$$\sum_{k_3=-\infty}^{0} 2^{k_3} \sum_{j_1,j_2,j_3\geqslant 0} 2^{-j_3/2}\|1_{D_{k_3,j_3}}\cdot(u_{k,j_1}*v_{k,j_2})\|_2. \tag{5.4.8}$$

上式关于k_3的求和分成$k_3<-10k$ 和$k_3\geqslant -10k$ 两部分, 只需考虑$k_3\geqslant -10k$时的求和. 类似地, 又只需要考虑$j_1,j_2,j_3\leqslant 10k$ 时的求和. 考虑最坏的情形$|j_3-2k-k_3|\leqslant 10$. 利用引理5.3.2(b)得

$$\begin{aligned}
&\|\langle\tau-\xi^3\rangle^{-1}\varphi_0(\xi)\xi(\widehat{\Delta_k u}*\widehat{\Delta_k v})\|_{X_0}\\
\lesssim&\sum_{k_3=-10k}^{0}\sum_{j_1,j_2\geqslant 0}2^{-k}2^{-k_3/2}2^{k_3}2^{-k/2}2^{-k_3/2}2^{j_1/2}2^{j_2/2}\|u_{k,j_1}\|_2\|v_{k,j_2}\|_2\\
\lesssim&k2^{-3k/2}\|\widehat{\Delta_k u}\|_{X_k}\|\widehat{\Delta_k v}\|_{X_k},
\end{aligned}\tag{5.4.9}$$

因此(a)得证.

现在证(b). 同样假设$k=k_2$且由定义知

$$\|\langle\tau-\xi^3\rangle^{-1}\varphi_{k_1}(\xi)\xi(\widehat{\Delta_k u}*\widehat{\Delta_k v})\|_{X_{k_1}}\lesssim 2^{k_1}\sum_{j_i\geqslant 0}2^{-j_1/2}\|1_{D_{k_1,j_1}}\cdot(u_{k,j_2}*v_{k,j_3})\|_2. \tag{5.4.10}$$

由支集性质, $j_{max}\geqslant 2k+k_1-10$. 同上, 可以假设求和中$j_1,j_2,j_3\leqslant 10k$. 我们将分情况控制(5.4.10)的右边项. 情形一是在求和中$j_1=j_{max}$. 利用引理5.3.2(b)可得

$$\begin{aligned}
&2^{k_1}\sum_{j_1,j_2,j_3\geqslant 0}2^{-j_1/2}\|1_{D_{k_1,j_1}}\cdot(u_{k,j_2}*v_{k,j_3})\|_2\\
\lesssim&\ 2^{k_1}\sum_{j_1\geqslant 2k+k_1-10}\sum_{j_2,j_3\geqslant 0}2^{-j_1/2}2^{-k/2}2^{-k_1/2}2^{(j_2+j_3)/2}\|u_{k,j_2}\|_2\|v_{k,j_3}\|_2\\
\lesssim&2^{-3k/2}\|\widehat{\Delta_k u}\|_{X_k}\|\widehat{\Delta_{k_2} v}\|_{X_{k_2}}.
\end{aligned}$$

情形二是$j_2=j_{max}$, 在这个情形之下有更好的特征函数乘子估计. 利用引理5.3.2(b)可得

$$\begin{aligned}
&2^{k_1}\sum_{j_1,j_2,j_3\geqslant 0}2^{-j_1/2}\|1_{D_{k_1,j_1}}\cdot(u_{k,j_2}*v_{k,j_3})\|_2\\
\lesssim&\ 2^{k_1}\sum_{j_2\geqslant 2k+k_1-10}\sum_{j_1,j_3\geqslant 0}2^{-j_1/2}2^{-k}2^{(j_1+j_3)/2}\|u_{k,j_2}\|_2\|v_{k,j_3}\|_2
\end{aligned}$$

$$\lesssim k2^{-2k}2^{k_1/2}\|\widehat{\Delta_k u}\|_{X_k}\|\widehat{\Delta_{k_2} v}\|_{X_{k_2}},$$

其中在最后一个不等式利用了$j_1 \leqslant 10k$. 由对称性, 最后一个情形$j_3 = j_{max}$与情形$j_2 = j_{max}$一样. 因此, 命题得证. □

现在用得到的这些命题来给出F^s中的双线性估计.

定理 5.4.7. 固定$s \in (-3/4, 0]$. 则$\forall\ s \leqslant \sigma \leqslant 0$, 存在常数$C > 0$使得$\forall\ u, v \in F^\sigma$有

$$\|\partial_x(uv)\|_{N^\sigma} \leqslant C(\|u\|_{F^s}\|v\|_{F^\sigma} + \|v\|_{F^s}\|u\|_{F^\sigma}). \tag{5.4.11}$$

证明. 由定义可得

$$\|\partial_x(uv)\|_{N^\sigma}^2 = \sum_{k_3\in\mathbb{Z}_+} 2^{2\sigma k_3}\|\langle\tau-\xi^3\rangle^{-1}\varphi_{k_3}(\xi)\xi(\widehat{u}*\widehat{v})\|_{X_{k_3}}^2.$$

将u, v二进制分解可得

$$\begin{aligned}&\|\langle\tau-\xi^3\rangle^{-1}\varphi_{k_3}(\xi)\xi(\widehat{u}*\widehat{v})\|_{X_{k_3}}\\ \lesssim&\sum_{k_1,k_2\in\mathbb{Z}_+}\|\langle\tau-\xi^3\rangle^{-1}\varphi_{k_3}(\xi)\xi(\widehat{\Delta_{k_1}u}*\widehat{\Delta_{k_2}v})\|_{X_{k_3}}.\end{aligned} \tag{5.4.12}$$

由函数的支集性质可得$|k_{max} - k_{med}| \leqslant 5$. 由对称性可以假定$k_1 \leqslant k_2$. 将上式中的求和分成四个部分可得(5.4.12)的右边小于等于

$$\Big(\sum_{j=1}^{4}\sum_{k_1,k_2\in A_j}\Big)\|\langle\tau-\xi^3\rangle^{-1}\varphi_{k_3}(\xi)\xi(\widehat{\Delta_{k_1}u}*\widehat{\Delta_{k_2}v})\|_{X_{k_3}}, \tag{5.4.13}$$

其中A_j, $j = 1, 2, 3, 4$如下定义

$$\begin{aligned}&A_1 = \{k_2 \geqslant 10, |k_2 - k_3| \leqslant 5, k_1 \leqslant k_2 - 10\};\\ &A_2 = \{k_2 \geqslant 10, |k_2 - k_3| \leqslant 5, k_2 - 9 \leqslant k_1 \leqslant k_2 + 10\};\\ &A_3 = \{k_2 \geqslant 10, |k_2 - k_1| \leqslant 5, k_3 \leqslant k_1 - 10\};\\ &A_4 = \{k_1, k_2, k_3 \leqslant 100\}.\end{aligned}$$

因此, (5.4.11)则立即由命题5.4.2-5.4.6, 条件$-3/4 < s \leqslant 0$以及离散形式的Young不等式得到. □

有了这个双线性估计, 结合尺度变换不变性(5.3.19), 同样可以证明KdV方程在$H^s(s > -3/4)$中的局部适定性. 从定理5.4.7的证明中可以知道, $s >$

$-3/4$的条件来源于命题5.4.6(a). 因此为考虑端点情形$s=-3/4$, 自然会问定理5.4.7是否对$s=-3/4$成立, 即命题5.4.6(a)中的界能否改进到$2^{-3k/2}$? 很遗憾, 下面的反例说明, 这样的改进是不可能的. 这一个反例是由N. Kishimoto [96]利用文[123]中的方法给出的.

命题5.4.8. *如果*$k\geqslant 200$*且*$|k-k_2|\leqslant 5$, *则存在*u, $v\in F^{-3/4}$*使得*

$$\|\langle\tau-\xi^3\rangle^{-1}\varphi_0(\xi)\xi(\widehat{\Delta_k u}*\widehat{\Delta_{k_2}v})\|_{X_0}\gtrsim\log(k)2^{-\frac{3k}{2}}\|\widehat{\Delta_k u}\|_{X_k}\|\widehat{\Delta_{k_2}v}\|_{X_{k_2}}.\tag{5.4.14}$$

证明. 令$N=2^k$, 选取$m\in\mathbb{N}$足够大且满足$2^m\ll N^{1/2}$. 对$j=0,1,\cdots,m$, 定义$R_j^0\subset\mathbb{R}^2$是平面上一个平行四边形区域, 四个顶点为

$$(\tau,\xi)=(0,0),\ (1,0),\ (3\cdot 2^{-j}N^{3/2}+1,2^{-j}N^{-1/2}),\ (3\cdot 2^{-j}N^{3/2},2^{-j}N^{-1/2}).$$

然后令$R_j:=((N+2^jN^{-1/2})^3,N+2^jN^{-1/2})+R_j^0$. 选取

$$\widehat{u}=\widehat{v}=N\sum_{j=0}^m 2^{j/2}a_j 1_{R_j\cup(-R_j)},$$

其中a_j是大于0的实数. 容易知道$\cup_{j=0}^m R_j\subset\{(\tau,\xi):|\tau-\xi^3|\leqslant 10\}$, 因此得

$$N^{-3/2}\|\widehat{\Delta_k u}\|_{X_k}\|\widehat{\Delta_{k_2}v}\|_{X_{k_2}}\sim N^2\sum_{j=0}^m[N^{-3/4}2^{j/2}a_j|R_j|^{1/2}]^2\sim\sum_{j=0}^m a_j^2.$$

另一方面, 注意到对$1\leqslant j\leqslant m$有

$$1_{R_j}*1_{-R_0}\gtrsim|R_j|1_{(\tau^{(j)},\xi^{(j)})-1/2R_0^0}\sim 2^{-j}N^{-1/2}1_{(\tau^{(j)},\xi^{(j)})-1/2R_0^0},\tag{5.4.15}$$

其中

$$(\tau^{(j)},\xi^{(j)})=((N+2^jN^{-1/2})^3,N+2^jN^{-1/2})-((N+N^{-1/2})^3,N+N^{-1/2}).$$

因此得$\|\langle\tau-\xi^3\rangle^{-1}\varphi_0(\xi)\xi\widehat{\Delta_k u}*\widehat{\Delta_{k_2}v}\|_{X_0}$大于等于

$$\sum_{j'=0}^\infty 2^{-j'/2}\|\varphi_{j'}(\tau-\xi^3)\varphi_0(\xi)\xi(N\sum_{j=1}^m 2^{j/2}a_j1_{R_j})*(Na_0 1_{-R_0})\|_{L^2}.\tag{5.4.16}$$

由(5.4.15)得(5.4.16)大于等于

$$N^{3/2}a_0\sum_{j'=0}^\infty 2^{-j'/2}\|\varphi_{j'}(\tau-\xi^3)\varphi_0(\xi)\xi\sum_{j=1}^m 2^{-j/2}a_j 1_{(\tau^{(j)},\xi^{(j)})-1/2R_0^0}\|_{L^2}.\tag{5.4.17}$$

容易看出如果$(\tau,\xi)\in(\tau^{(j)},\xi^{(j)})-1/2R_0$ $(j\geqslant 1)$, 则有$|\xi|\sim 2^jN^{-1/2}$且$|\tau|\sim 2^jN^{3/2}$, 从而知(5.4.17)等价于

$$N^{3/2}a_0\sum_{j'\geqslant 0,2^jN^{3/2}\sim 2^{j'}}2^{-j'/2}\|\varphi_{j'}(\tau-\xi^3)\varphi_0(\xi)\xi 2^{-j/2}a_j 1_{(\tau^{(j)},\xi^{(j)})-1/2R_0^0}\|_{L^2}$$
$$\sim N^{3/2}a_0\sum_{j=1}^m(2^jN^{3/2})^{-1/2}2^jN^{-1/2}2^{-j/2}a_j|R_0^0|^{1/2}\sim a_0\sum_{j=1}^m a_j.$$

选取$a_j=1/(j+1)$, 命题得证. □

上述命题表明, 当$s=-3/4$时, 无法直接使用F^s结构或者$X^{s,b}$结构来得到KdV方程的局部适定性. 从前面的讨论知, 问题只出现在低频部分$P_{\leqslant 0}u$的结构上. 但是幸运地是, 采取一个新的低频结构, 能够弥补命题5.4.6(a)的对数发散. 在低频时采取如下结构:

$$\|u\|_{\bar{X}_0}=\|u\|_{L_x^2L_t^\infty}.$$

由命题5.4.1知

$$\|\varphi_0(t)\Delta_0u\|_{\bar{X}_0}\lesssim\|\Delta_0u\|_{X_0}. \tag{5.4.18}$$

从而这里的低频结构比F^s中的结构更弱, 但是在另一方面我们得: 对任意的$1\leqslant q\leqslant\infty$以及$2\leqslant r\leqslant\infty$有

$$\|\Delta_0u\|_{L^q_{|t|\leqslant T}L^r_x\cap L^r_xL^q_{|t|\leqslant T}}\lesssim_T\|\Delta_0u\|_{L^2_xL^\infty_{|t|\leqslant T}}. \tag{5.4.19}$$

对$-3/4\leqslant s\leqslant 0$, 定义工作空间

$$\bar{F}^s=\{u\in\mathcal{S}'(\mathbb{R}^2):\|u\|^2_{\bar{F}^s}=\sum_{k\geqslant 1}2^{2sk}\|\varphi_k(\xi)\mathscr{F}u\|^2_{X_k}+\|\Delta_0u\|^2_{\bar{X}_0}<\infty\}.$$

设$T\geqslant 0$, 定义时间局部的空间$\bar{F}^s(T)$:

$$\|u\|_{\bar{F}^s(T)}=\inf_{w\in\bar{F}^s}\{\|\Delta_0u\|_{L^2_xL^\infty_{|t|\leqslant T}}+\|(I-\Delta_0)w\|_{\bar{F}^s},\ w(t)=u(t),t\in[-T,T]\}.$$

接下来我们证明KdV方程在$s=-3/4$时的局部适定性.

定理 5.4.9. *假设$s\geqslant -3/4$且$\phi\in H^s$. 则*

(a) 存在性. 存在时间$T=T(\|u_0\|_{H^{-3/4}})>0$和Cauchy问题(5.3.1)分布意义下的解$u$满足

$$u\in\bar{F}^s(T)\subset C([-T,T]:H^s).$$

(b) 唯一性. 解映射$S_T:u_0\to u$是光滑解映射$H^\infty\to C([-T,T]:H^\infty)$的唯一延拓.

(c) Lipschitz连续性. 对任意的$R>0$, 映射$u_0\to u$是从$\{u_0\in H^s:\|u_0\|_{H^s}<R\}$到$C([-T,T]:H^s)$Lipschitz连续的.

(d) 继承性. 如果还有$u_0\in H^s$对某个$\sigma>s$, 则$u\in H^\sigma$.

现在简单阐述一下构造$\bar{F}^s$的主要想法. 基本的出发点是考虑F^s中的双线性估计:

$$\|\partial_x(uv)\|_{N^s}\leqslant C\|u\|_{F^s}\|v\|_{F^s}.$$

从前面的讨论知, 这个双线性估计在$s=-3/4$时是不对的, 因此不能用F^s来直接构造压缩映射. 如果我们仍然希望用压缩映射原理来构造$s=-3/4$的局部解, 那么需要构造新的工作空间$\bar{F}^{-3/4}$, 当然$\bar{F}^{-3/4}$必须满足

$$\bar{F}^{-3/4}\subset C(\mathbb{R}:H^{-3/4}).$$

由KdV方程(5.3.1)等价的积分方程

$$u=S(t)u_0+C\int_0^t S(t-s)\partial_x(u^2)(s)ds.$$

将它时间局部化

$$u=\psi(t)S(t)u_0+C\psi(t)\int_0^t S(t-s)\partial_x(u^2)(s)ds, \tag{5.4.20}$$

其中$\psi(t)=\varphi_0(t)$. 定义算子$T_{u_0}(u)$为(5.4.20)的右边项. 做迭代

$$u^{(0)}=0;\cdots;u^{(n+1)}\ =\ T_{u_0}(u^{(n)});\cdots$$

因而得到一个序列$\{u^{(n)}\}$. 如果能对(5.4.20)在$\bar{F}^{-3/4}$构造压缩映射且u_0满足$\|u_0\|_{H^{-3/4}}\ll 1$, 则序列$\{u^{(n)}\}$在$C(\mathbb{R}:H^{-3/4})$中收敛. 所以一个基本的必要条件是

$$u^{(n)}\in C(\mathbb{R}:H^{-3/4}),\quad \forall\ n\in\mathbb{N}. \tag{5.4.21}$$

接下来逐个分析这个序列$\{u^{(n)}\}$来验证条件(5.4.21). 对$n=0,1$时, 显然有$u^{(0)},u^{(1)}\in C(\mathbb{R};H^{-3/4})$, 这是比较平凡的. 然而$n=2$的情形就体现了很本质的东西. 现在考虑$n=2$的情形. 根据定义有

$$u^{(2)}=\psi(t)S(t)u_0+C\psi(t)\int_0^t S(t-s)\partial_x(S(s)u_0\cdot S(s)u_0)ds.$$

只需分别证明$(I-\Delta_0)(u^{(2)})\in C(\mathbb{R};\ H^{-3/4})$且$\Delta_0(u^{(2)})\in C(\mathbb{R};\ L^2)$. 首先考虑高频部分, 注意到

$$\begin{aligned}&\psi(t)\int_0^t S(t-s)\partial_x(S(s)u_0\cdot S(s)u_0)ds\\ =&\ \psi(t)\int_0^t S(t-s)\partial_x[\psi(s/2)S(s)u_0\cdot \psi(s/2)S(s)u_0]ds.\end{aligned}$$

容易验证对任意$s\in\mathbb{R}$有

$$\|\psi(s/2)S(s)u_0\|_{F^s}\lesssim\|u_0\|_{H^s},$$

从而利用频率二进局部的双线性估计以及命题5.1.7, 可得对$k\in\mathbb{N}$有$\Delta_k(u^{(2)})\in X_k\subset C(\mathbb{R};\ H^{-3/4})$.

对低频部分, 我们不能类似得到$\Delta_0(u^{(2)})\in X_0$, 因为有一个对数的发散. 通过计算可知

$$\begin{aligned}&\mathscr{F}_x\Big[\psi(t)\int_0^t S(t-s)\Delta_0\partial_x[\Delta_{k_1}u(s)\Delta_{k_2}v(s)]ds\Big](\xi)\\ =&\ \psi(t)\eta_0(\xi)i\xi\int_0^t e^{i(t-s)\xi^3}\int_{\xi=\xi_1+\xi_2} e^{is\xi_1^3}\widehat{\Delta_{k_1}u_0}(\xi_1)e^{is\xi_2^3}\widehat{\Delta_{k_2}v_0}(\xi_2)ds\\ =&\ \psi(t)\eta_0(\xi)e^{it\xi^3}\xi\int_{\xi=\xi_1+\xi_2}\frac{1-e^{-it(\xi^3-\xi_1^3-\xi_2^3)}}{\xi^3-\xi_1^3-\xi_2^3}\widehat{\Delta_{k_1}u_0}(\xi_1)\widehat{\Delta_{k_2}v_0}(\xi_2)\\ :=&\ \mathscr{F}_x(I)+\mathscr{F}_x(II).\end{aligned}$$

因为在超平面$\xi=\xi_1+\xi_2$有$\xi^3-\xi_1^3-\xi_2^3=3\xi\xi_1\xi_2$, 从而得

$$\mathscr{F}_x(I)=\psi(t)\varphi_0(\xi)e^{it\xi^3}\int_{\xi=\xi_1+\xi_2}\frac{\widehat{\Delta_{k_1}u_0}(\xi_1)\widehat{\Delta_{k_2}v_0}(\xi_2)}{3\xi_1\xi_2}.$$

所以利用定理5.2.2可得

$$\|I\|_{L_x^2L_t^\infty}\leqslant C\left\|\int_{\xi=\xi_1+\xi_2}\frac{\widehat{\Delta_{k_1}u_0}(\xi_1)\widehat{\Delta_{k_2}v_0}(\xi_2)}{3\xi_1\xi_2}\right\|_{L_\xi^2}\leqslant C2^{-3k_1/2}\|u_0\|_{L^2}\|v_0\|_{L^2}.$$

关于第II项有

$$\mathscr{F}_x(II)=\psi(t)\varphi_0(\xi)\int_{\xi=\xi_1+\xi_2}\frac{-e^{it(\xi_1^3+\xi_2^3)}}{3\xi_1\xi_2}\widehat{\Delta_{k_1}u_0}(\xi_1)\widehat{\Delta_{k_2}v_0}(\xi_2).$$

所以利用定理5.2.1得

$$\begin{aligned}\|II\|_{L_x^2L_t^\infty}\leqslant& C\|e^{t\partial_x^3}\partial_x^{-1}\Delta_{k_1}u_0\cdot e^{t\partial_x^3}\partial_x^{-1}\Delta_{k_2}v_0\|_{L_x^2L_t^\infty}\\ \leqslant& C\|e^{t\partial_x^3}\partial_x^{-1}\Delta_{k_1}u_0\|_{L_x^4L_t^\infty}\|e^{t\partial_x^3}\partial_x^{-1}\Delta_{k_2}v_0\|_{L_x^4L_t^\infty}\\ \leqslant& C2^{-3k_1/2}\|u_0\|_{L^2}\|v_0\|_{L^2}.\end{aligned}$$

因此, 我们证明了$\Delta_0(u^{(2)})\in L_x^2L_t^\infty$.

接下来考虑$n\geqslant 3$的情形. 对于$n\geqslant 3$, 是否仍然有$(I-\Delta_0)(u^{(n)})\in F^s$且$\Delta_0(u^{(n)})\in L_x^2L_t^\infty$? 我们有下面的命题.

命题5.4.10 ($\bar{X}_0$**估计**). 设$|k_1-k_2|\leqslant 5$且$k_1\geqslant 10$. 则对于$u,v\in\bar{F}^0$有

$$\left\|\psi(t)\int_0^t S(t-s)\Delta_0\partial_x[\Delta_{k_1}u(s)\Delta_{k_2}v(s)]ds\right\|_{L_x^2L_t^\infty}\lesssim 2^{-\frac{3k_1}{2}}\|\widehat{\Delta_{k_1}u}\|_{X_{k_1}}\|\widehat{\Delta_{k_2}u}\|_{X_{k_2}}.$$

证明. 记$Q(u,v)=\psi(t)\int_0^t S(t-s)\Delta_0\partial_x[\Delta_{k_1}u(s)\Delta_{k_2}v(s)]ds$. 通过直接的计算可以得到

$$\begin{aligned}\mathscr{F}\left[Q(u,v)\right](\xi,\tau)\ =&\ c\int_{\mathbb{R}}\frac{\widehat{\psi}(\tau-\tau')-\widehat{\psi}(\tau-\xi^3)}{\tau'-\xi^3}\varphi_0(\xi)i\xi\\ &\times d\tau'\int_{\xi=\xi_1+\xi_2,\tau'=\tau_1+\tau_2}\widehat{\Delta_{k_1}u}(\xi_1,\tau_1)\widehat{\Delta_{k_2}v}(\xi_2,\tau_2).\end{aligned}$$

固定$\xi\in\mathbb{R}$, 将超平面$\Gamma:=\{\xi=\xi_1+\xi_2,\tau'=\tau_1+\tau_2\}$按如下方式分解

$$\begin{aligned}\Gamma_1=&\{|\xi|\lesssim 2^{-2k_1}\}\cap\Gamma;\\ \Gamma_2=&\{|\xi|\gg 2^{-2k_1},|\tau_i-\xi_i^3|\ll 3\cdot 2^{2k_1}|\xi|,i=1,2\}\cap\Gamma;\\ \Gamma_3=&\{|\xi|\gg 2^{-2k_1},|\tau_1-\xi_1^3|\gtrsim 3\cdot 2^{2k_1}|\xi|\}\cap\Gamma;\\ \Gamma_4=&\{|\xi|\gg 2^{-2k_1},|\tau_2-\xi_2^3|\gtrsim 3\cdot 2^{2k_1}|\xi|\}\cap\Gamma.\end{aligned}$$

从而可得

$$\mathscr{F}\left[\psi(t)\cdot\int_0^t S(t-s)\Delta_0\partial_x[\Delta_{k_1}u(s)\Delta_{k_2}v(s)]ds\right](\xi,\tau)=A_1+...+A_4,$$

其中

$$A_i=C\int_{\mathbb{R}}\frac{\widehat{\psi}(\tau-\tau')-\widehat{\psi}(\tau-\xi^3)}{\tau'-\xi^3}\Delta_0(\xi)i\xi\int_{\Gamma_i}\widehat{\Delta_{k_1}u}(\xi_1,\tau_1)\widehat{\Delta_{k_2}v}(\xi_2,\tau_2)d\tau'.$$

首先考虑A_1的估计. 利用命题5.4.1以及命题5.1.7 (b), 可得

$$\|\mathscr{F}^{-1}(A_1)\|_{L_x^2L_t^\infty}\lesssim\left\|\langle\tau'-\xi^3\rangle^{-1}\varphi_0(\xi)\xi\int_{A_1}\widehat{\Delta_{k_1}u}(\xi_1,\tau_1)\widehat{\Delta_{k_2}v}(\xi_2,\tau_2)\right\|_{X_0}.$$

由于在Γ_1有$|\xi|\lesssim 2^{-2k_1}$, 从而可得

$$\begin{aligned}&\left\|\langle\tau'-\xi^3\rangle^{-1}\varphi_0(\xi)i\xi\int_{\Gamma_1}\widehat{\Delta_{k_1}u}(\xi_1,\tau_1)\widehat{P_{k_2}v}(\xi_2,\tau_2)\right\|_{X_0}\\ \lesssim&\sum_{k_3\leqslant -2k_1+10}\sum_{j_3\geqslant 0}2^{-j_3/2}2^{k_3}\sum_{j_1\geqslant 0,j_2\geqslant 0}\|1_{D_{k_3,j_3}}\cdot(u_{k_1,j_1}*v_{k_2,j_2})\|_{L^2}.\end{aligned}$$

利用(5.3.6)可得

$$\begin{aligned}\|\mathscr{F}^{-1}(A_1)\|_{L_x^2L_t^\infty}\lesssim&\sum_{k_3\leqslant -2k_1+10}\sum_{j_i\geqslant 0}2^{-j_3/2}2^{k_3}2^{j_{min}/2}2^{k_3/2}\|u_{k_1,j_1}\|_{L^2}\|v_{k_2,j_2}\|_{L^2}\\ \lesssim&2^{-3k_1}\|\widehat{\Delta_{k_1}u}\|_{X_{k_1}}\|\widehat{\Delta_{k_2}u}\|_{X_{k_2}},\end{aligned}$$

从而第A_1项得到控制.

接下来考虑第A_3项. 类似A_1的控制, 利用命题5.4.1以及命题5.1.7(b)可得

$$\begin{aligned}\|\mathscr{F}^{-1}(A_3)\|_{L_x^2L_t^\infty}\lesssim&\left\|\langle\tau'-\xi^3\rangle^{-1}\varphi_0(\xi)\xi\int_{A_3\cup A_4}\widehat{\Delta_{k_1}u}(\xi_1,\tau_1)\widehat{\Delta_{k_2}v}(\xi_2,\tau_2)\right\|_{X_0}\\ \lesssim&\sum_{k_3\leqslant 0}\sum_{j_3\geqslant 0}2^{-j_3/2}2^{k_3}\sum_{j_1,j_2\geqslant 0}\|1_{D_{k_3,j_3}}\cdot(u_{k_1,j_1}*v_{k_2,j_2})\|_{L^2}.\end{aligned}$$

显然可以假设在上述求和中有$j_3\leqslant 10k_1$. 由对称性不妨设$|\tau_1-\xi_1^3|\gtrsim 3|\xi\xi_1\xi_2|$. 利用引理5.3.2(b)可得

$$\begin{aligned}\|\mathscr{F}^{-1}(A_3)\|_{L_x^2L_t^\infty}\lesssim&\sum_{k_3\leqslant 0}\sum_{j_1\geqslant k_3+2k_1-10,j_2,j_3\geqslant 0}2^{k_3}2^{j_2/2}2^{-k_1}\|u_{k_1,j_1}\|_{L^2}\|v_{k_2,j_2}\|_{L^2}\\ \lesssim&k_1 2^{-2k_1}\|\widehat{\Delta_{k_1}u}\|_{X_{k_1}}\|\widehat{\Delta_{k_2}u}\|_{X_{k_2}},\end{aligned}$$

从而第A_3项得到控制. 类似有A_4的控制.

现在考虑A_2的估计. 从频率二进局部的双线性估计知这是主要项. 通过简单计算得到

$$\begin{aligned}\mathscr{F}_t^{-1}(A_2)\ =\ &\psi(t)\int_0^t e^{i(t-s)\xi^3}\varphi_0(\xi)i\xi\int_{\mathbb{R}^2}e^{is(\tau_1+\tau_2)}\\ &\times\int_{\xi=\xi_1+\xi_2}u_{k_1}(\xi_1,\tau_1)v_{k_2}(\xi_2,\tau_2)\ d\tau_1 d\tau_2 ds\end{aligned}$$

其中

$$
\begin{aligned}
u_{k_1}(\xi_1,\tau_1)=&\varphi_{k_1}(\xi_1)1_{\{|\tau_1-\xi_1^3|\ll 3\cdot 2^{2k_1}|\xi|\}}\widehat{u}(\xi_1,\tau_1),\\
v_{k_2}(\xi_2,\tau_2)=&\varphi_{k_2}(\xi_2)1_{\{|\tau_2-\xi_2^3|\ll 3\cdot 2^{2k_1}|\xi|\}}\widehat{v}(\xi_2,\tau_2).
\end{aligned}
$$

通过坐标变换$\tau_1'=\tau_1-\xi_1^3$, $\tau_2'=\tau_2-\xi_2^3$, 可得

$$
\begin{aligned}
\mathscr{F}_t^{-1}(A_2)=&\psi(t)e^{it\xi^3}\varphi_0(\xi)i\xi\int_0^t e^{-is\xi^3}\int_{\mathbb{R}^2}e^{is(\tau_1+\tau_2)}\\
&\times\int_{\xi=\xi_1+\xi_2}e^{is\xi_1^3}u_{k_1}(\xi_1,\tau_1+\xi_1^3)e^{is\xi_2^3}v_{k_2}(\xi_2,\tau_2+\xi_2^3)\,d\tau_1d\tau_2ds.
\end{aligned}
$$

交换积分顺序可得上式等于

$$
\begin{aligned}
\psi(t)e^{it\xi^3}\varphi_0(\xi)\xi\int_{\mathbb{R}^2}e^{it(\tau_1+\tau_2)}&\int_{\xi=\xi_1+\xi_2}\frac{e^{it(\xi_1^3+\xi_2^3-\xi^3)}-e^{-it(\tau_1+\tau_2)}}{\tau_1+\tau_2-\xi^3+\xi_1^3+\xi_2^3}\\
&\times\ u_{k_1}(\xi_1,\tau_1+\xi_1^3)v_{k_2}(\xi_2,\tau_2+\xi_2^3)\,d\tau_1d\tau_2\\
&:=\mathscr{F}_t^{-1}(II_1)-\mathscr{F}_t^{-1}(II_2).
\end{aligned}
$$

对于第II_2项，有

$$
\mathscr{F}_t^{-1}(II_2)=\int_{\mathbb{R}^2}\psi(t)e^{it\xi^3}\varphi_0(\xi)\xi\int_{\xi=\xi_1+\xi_2}\frac{u_{k_1}(\xi_1,\tau_1+\xi_1^3)v_{k_2}(\xi_2,\tau_2+\xi_2^3)}{\tau_1+\tau_2-\xi^3+\xi_1^3+\xi_2^3}\,d\tau_1d\tau_2.
$$

因为在积分区域有$|\tau_1+\tau_2-\xi^3+\xi_1^3+\xi_2^3|\sim|\xi\xi_1\xi_2|$, 所以利用定理5.2.2得

$$
\begin{aligned}
&\|\mathscr{F}^{-1}(II_2)\|_{L_x^2L_t^\infty}\\
\lesssim&\int_{\mathbb{R}^2}\left\|\int_{\xi=\xi_1+\xi_2}\xi\frac{u_{k_1}(\xi_1,\tau_1+\xi_1^3)v_{k_2}(\xi_2,\tau_2+\xi_2^3)}{\tau_1+\tau_2-\xi^3+\xi_1^3+\xi_2^3}\right\|_{L_\xi^2}d\tau_1d\tau_2\\
\lesssim&2^{-\frac{3k_1}{2}}\|\widehat{\Delta_{k_1}u}\|_{X_{k_1}}\|\widehat{\Delta_{k_2}u}\|_{X_{k_2}}.
\end{aligned}
$$

为证明命题5.4.10, 剩下只需要证

$$
\|\mathscr{F}^{-1}(II_1)\|_{L_x^2L_t^\infty}\lesssim 2^{-3k_1/2}\|\widehat{P_{k_1}u}\|_{X_{k_1}}\|\widehat{P_{k_2}u}\|_{X_{k_2}}.
$$

将II_1与以下的II_1'做比较:

$$
\begin{aligned}
\mathscr{F}_t^{-1}(II_1')=&\psi(t)e^{it\xi^3}\varphi_0(\xi)\xi\int_{\mathbb{R}^2}e^{it(\tau_1+\tau_2)}\int_{\xi=\xi_1+\xi_2}\frac{e^{it(\xi_1^3+\xi_2^3-\xi^3)}}{-\xi^3+\xi_1^3+\xi_2^3}\\
&\times\ u_{k_1}(\xi_1,\tau_1+\xi_1^3)v_{k_2}(\xi_2,\tau_2+\xi_2^3)\,d\tau_1d\tau_2.
\end{aligned}
$$

对于II_1'项有

$$\mathscr{F}_t^{-1}(II_1') = \int_{\mathbb{R}^2} \psi(t)\varphi_0(\xi)e^{it(\tau_1+\tau_2)}1_{\{|\xi|\gg|\tau_1|2^{-2k_1}\}}1_{\{|\xi|\gg|\tau_2|2^{-2k_1}\}} \times \int_{\xi=\xi_1+\xi_2} \frac{e^{it(\xi_1^3+\xi_2^3)}}{-3\xi_1\xi_2}\mathscr{F}(f_{\tau_1})(\xi_1)\mathscr{F}(g_{\tau_2})(\xi_2)\, d\tau_1 d\tau_2.$$

其中对$\tau_1,\tau_2\in\mathbb{R}$为参数, 记

$$\mathscr{F}(f_{\tau_1})(\xi) = \widehat{\Delta_{k_1}u}(\xi,\tau_1+\xi^3),\ \ \mathscr{F}(g_{\tau_2})(\xi) = \widehat{\Delta_{k_2}v}(\xi,\tau_2+\xi^3).$$

由于(事实上可以做一个光滑的截断代替$1_{\{|\xi|\gg\lambda\}}$) $\forall\ \lambda>0$有

$$\|\mathscr{F}_x^{-1}1_{\{|\xi|\gg\lambda\}}\mathscr{F}_x u\|_{L_x^2L_t^\infty}\lesssim\|u\|_{L_x^2L_t^\infty},$$

因此根据定理5.2.2可得

$$\begin{aligned}\|\mathscr{F}^{-1}(II_1')\|_{L_x^2L_t^\infty}\lesssim & \int_{\mathbb{R}^2}\|S(t)\partial_x^{-1}f_{\tau_1}S(t)\partial_x^{-1}f_{\tau_2}\|_{L_x^2L_t^\infty}d\tau_1 d\tau_2\\ \lesssim & \int_{\mathbb{R}^2}\|S(t)\partial_x^{-1}f_{\tau_1})\|_{L_x^4L_t^\infty}\|S(t)\partial_x^{-1}f_{\tau_2}\|_{L_x^4L_t^\infty}d\tau_1 d\tau_2\\ \lesssim & 2^{-\frac{3k_1}{2}}\|\widehat{\Delta_{k_1}u}\|_{X_{k_1}}\|\widehat{\Delta_{k_2}u}\|_{X_{k_2}},\end{aligned}$$

这样II_1'得到控制.

为证明命题5.4.10, 可知只要再证

$$\|\mathscr{F}^{-1}(II_1-II_1')\|_{L_x^2L_t^\infty}\lesssim 2^{-3k_1/2}\|\widehat{P_{k_1}u}\|_{X_{k_1}}\|\widehat{P_{k_2}u}\|_{X_{k_2}}.$$

因为在积分区域有$|\tau_i|\ll 2^{2k_1}|\xi|$, $i=1,2$, 所以在超平面上有

$$\frac{1}{\tau_1+\tau_2-\xi^3+\xi_1^3+\xi_2^3}-\frac{1}{-\xi^3+\xi_1^3+\xi_2^3}=\sum_{n=1}^\infty\frac{1}{3\xi\xi_1\xi_2}\left(\frac{\tau_1+\tau_2}{3\xi\xi_1\xi_2}\right)^n.$$

这样可得

$$\begin{aligned}&\mathscr{F}_t^{-1}(II_1-II_1')\\ =&\psi(t)\varphi_0(\xi)\xi\int_{\mathbb{R}^2}e^{it(\tau_1+\tau_2)}\int_{\xi=\xi_1+\xi_2}\sum_{n=1}^\infty\frac{1}{3\xi\xi_1\xi_2}\left(\frac{\tau_1+\tau_2}{3\xi\xi_1\xi_2}\right)^n\\ &\times\ e^{it(\xi_1^3+\xi_2^3)}u_{k_1}(\xi_1,\tau_1+\xi_1^3)v_{k_2}(\xi_2,\tau_2+\xi_2^3)\ d\tau_1 d\tau_2.\end{aligned}$$

对低频做一个齐次的二进分解, $\{\chi_k(\xi)\}_{k=-\infty}^{\infty}$表示频率空间的齐次分解, 得

$$\begin{aligned}
&\mathscr{F}_t^{-1}(II_1 - II_1')\\
=&\sum_{n=1}^{\infty}\int_{\mathbb{R}^2} e^{it(\tau_1+\tau_2)} \sum_{2^{k_3}\gg 2^{-2k_1}\max(|\tau_1|,|\tau_2|)} \psi(t)e^{it(\xi_1^3+\xi_2^3)}\chi_{k_3}(\xi)\\
&\times \int_{\xi=\xi_1+\xi_2}\left(\frac{\tau_1+\tau_2}{3\xi\xi_1\xi_2}\right)^n \frac{u_{k_1}(\xi_1,\tau_1+\xi_1^3)v_{k_2}(\xi_2,\tau_2+\xi_2^3)}{3\xi_1\xi_2}\,d\tau_1 d\tau_2
\end{aligned}$$

将它重新写成如下形式

$$\begin{aligned}
&\mathscr{F}_t^{-1}(II_1 - II_1')\\
=&\sum_{n=1}^{\infty}\int_{\mathbb{R}^2} e^{it(\tau_1+\tau_2)} \sum_{2^{k_3}\gg 2^{-2k_1}\max(|\tau_1|,|\tau_2|)} \psi(t)e^{it(\xi_1^3+\xi_2^3)}\chi_{k_3}(\xi)(\xi/2^{k_3})^{-n}\\
&\times 2^{-nk_3}\int_{\xi=\xi_1+\xi_2}\left(\frac{\tau_1+\tau_2}{3\xi_1\xi_2}\right)^n \frac{u_{k_1}(\xi_1,\tau_1+\xi_1^3)v_{k_2}(\xi_2,\tau_2+\xi_2^3)}{3\xi_1\xi_2}\,d\tau_1 d\tau_2
\end{aligned}$$

因为$\chi_{k_3}(\xi)(\xi/2^{k_3})^{-n}$是空间$L_x^2L_t^\infty$的乘子，所以类似$II_1'$项可得

$$\begin{aligned}
&\|\mathscr{F}^{-1}(II_1 - II_1')\|_{L_x^2L_t^\infty}\\
\lesssim&\sum_{n=1}^{\infty}\int_{\mathbb{R}^2} \sum_{2^{k_3}\gg 2^{-2k_1}\max(|\tau_1|,|\tau_2|)} C^n|\tau_1+\tau_2|^n 2^{-nk_3}\\
&\times \left\|\psi(t)e^{it(\xi_1^3+\xi_2^3)}\int_{\xi=\xi_1+\xi_2}\frac{\mathscr{F}(f_{\tau_1})(\xi_1)\mathscr{F}(g_{\tau_2})(\xi_2)}{3\xi_1^{n+1}\xi_2^{n+1}}\right\|_{L_x^2L_t^\infty} d\tau_1 d\tau_2.
\end{aligned}$$

利用定理5.2.2以及对k_3求和可得对某个$M \gg 1$

$$\begin{aligned}
&\|\mathscr{F}^{-1}(II_1 - II_1')\|_{L_x^2L_t^\infty}\\
\lesssim&\sum_{n=1}^{\infty}\int_{\mathbb{R}^2} \sum_{2^{k_3}\gg 2^{-2k_1}\max(|\tau_1|,|\tau_2|)} C^n|\tau_1+\tau_2|^n 2^{-nk_3}2^{-2nk_1}\\
&\times 2^{-3k_1/2}\|\mathscr{F}(f_{\tau_1})\|_{L^2}\|\mathscr{F}(g_{\tau_2})\|_{L^2}d\tau_1 d\tau_2\\
\lesssim&\sum_{n=1}^{\infty}(C/M)^n\int_{\mathbb{R}^2} 2^{-3k_1/2}\|\mathscr{F}(f_{\tau_1})\|_{L^2}\|\mathscr{F}(g_{\tau_2})\|_{L^2}d\tau_1 d\tau_2\\
\lesssim&\ 2^{-3k_1/2}\|\widehat{P_{k_1}u}\|_{X_{k_1}}\|\widehat{P_{k_2}u}\|_{X_{k_2}}.
\end{aligned}$$

因此，命题得证. □

这个命题启发我们, 可以在低频采取$L_x^2L_t^\infty$的结构. 因为$L_x^2L_t^\infty$比X_0更弱, 所以自然问这个结构是否仍然可以控制高低频相互作用. 我们有如下命题:

命题5.4.11. 如果$k \geqslant 10$, $|k-k_2| \leqslant 5$, 则对任意的$u, v \in \bar{F}^0$

$$\|\langle \tau-\xi^3\rangle^{-1}\varphi_k(\xi)\xi(\widehat{\Delta_0 u} * \widehat{\Delta_{k_2} v})\|_{X_k} \lesssim \|\Delta_0 u\|_{L_x^2 L_t^\infty} \|\widehat{\Delta_{k_2} v}\|_{X_{k_2}}. \tag{5.4.22}$$

证明. 不妨假设$k=k_2$. 由X_k的定义得

$$\|\langle \tau-\xi^3\rangle^{-1}\varphi_k(\xi)\xi(\widehat{\Delta_0 u} * \widehat{\Delta_k v})\|_{X_k} \lesssim 2^k \sum_{j\geqslant 0} 2^{-j/2} \|\widehat{\Delta_0 u} * \widehat{\Delta_{k_2} v}\|_{L^2_{\xi,\tau}}. \tag{5.4.23}$$

由Plancherel等式和命题5.4.1得到

$$2^k \|\widehat{\Delta_0 u} * \widehat{\Delta_{k_2} v}\|_{L^2_{\xi,\tau}} \lesssim 2^k \|\Delta_0 u\|_{L_x^2 L_t^\infty} \|\Delta_k u\|_{L_x^\infty L_t^2} \lesssim \|\Delta_0 u\|_{L_x^2 L_t^\infty} \|\widehat{\Delta_k v}\|_{X_k},$$

因此命题得证. □

接下来证明一个关键的双线性估计, 将用来证明定理5.4.9. 对$u, v \in \bar{F}^s$我们定义双线性算子

$$B(u,v) = \psi(t/4)\int_0^t S(t-\tau)\partial_x\big(\psi^2(\tau)u(\tau)\cdot v(\tau)\big)d\tau. \tag{5.4.24}$$

考虑如下的积分方程

$$u = \psi(t)S(t)u_0 + \psi(t/4)\int_0^t S(t-\tau)\partial_x\big(\psi^2(\tau)u(\tau)\cdot u(\tau)\big)d\tau. \tag{5.4.25}$$

为了对方程(5.4.25)使用压缩映射方法, 所有的事情归结为证明算子的有界性$B: \bar{F}^s \times \bar{F}^s \to \bar{F}^s$.

命题5.4.12. 假设$-3/4 \leqslant s \leqslant 0$. 则存在常数$C>0$使得

$$\|B(u,v)\|_{\bar{F}^s} \leqslant C(\|u\|_{\bar{F}^s}\|v\|_{\bar{F}^{-3/4}} + \|u\|_{\bar{F}^{-3/4}}\|v\|_{\bar{F}^s}) \tag{5.4.26}$$

对任意的u, $v \in \bar{F}^s$都成立.

证明. 由F^s的定义得

$$\|B(u,v)\|^2_{\bar{F}^s} = \|\Delta_0 B(u,v)\|^2_{\bar{X}_0} + \sum_{k_1\geqslant 1} 2^{2k_1 s}\|\varphi_{k_1}(\xi)\mathscr{F}[B(u,v)]\|^2_{X_{k_1}}. \tag{5.4.27}$$

首先考虑(5.4.27)右边项的第二项. 对u, v做Littlewood-Paley分解我们得到

$$\|\varphi_{k_1}(\xi)\mathscr{F}[B(u,v)]\|_{X_{k_1}} \lesssim \sum_{k_2,k_3\geqslant 0} \|\varphi_{k_1}(\xi)\mathscr{F}[B(\Delta_{k_2}(u),\Delta_{k_3}(v))]\|_{X_{k_1}}. \tag{5.4.28}$$

由命题5.1.7(b)得(5.4.28)的右边项小于等于

$$\sum_{k_2,k_3\geqslant 0}\|\langle\tau-\xi^3\rangle^{-1}\varphi_{k_1}(\xi)\xi\widehat{\psi(t)\Delta_{k_2}u}*\widehat{\psi(t)\Delta_{k_3}v}\|_{X_{k_1}}. \tag{5.4.29}$$

由对称性可以假设在(5.4.29)中有$k_2\leqslant k_3$. 只要证

$$\begin{aligned}&\Big(\sum_{k_1\geqslant 1}2^{2k_1s}\Big[\sum_{k_2,k_3\geqslant 0}\|\langle\tau-\xi^3\rangle^{-1}\varphi_{k_1}(\xi)\xi\widehat{\psi(t)\Delta_{k_2}u}*\widehat{\psi(t)\Delta_{k_3}v}\|_{X_{k_1}}\Big]^2\Big)^{1/2}\\&\lesssim\|u\|_{\bar F^{-3/4}}\|v\|_{\bar F^s}.\end{aligned} \tag{5.4.30}$$

如果$k_{max}\leqslant 20$则利用命题5.4.5得到(5.4.29)小于等于

$$\sum_{k_{max}\leqslant 20}\|\Delta_{k_2}u\|_{L_t^\infty L_x^2}\|\Delta_{k_3}v\|_{L_t^\infty L_x^2},$$

由此推出界(5.4.30), 因为在这种情形下有$\|\Delta_k u\|_{L_t^\infty L_x^2}\lesssim\|\Delta_k u\|_{X_k}$若$k\geqslant 1$, 且$\|\Delta_k u\|_{L_t^\infty L_x^2}\lesssim\|\Delta_k u\|_{\bar X_k}$若$k=0$. 现在假设在(5.4.30)中有$k_{max}\geqslant 20$, 则有三种情况. 如果$|k_1-k_3|\leqslant 5, k_2\leqslant k_1-10$, 则利用命题5.4.2 (a)若$k_2=0$, 和(b)若$k_2\geqslant 1$; 如果$|k_1-k_3|\leqslant 5, k_1-9\leqslant k_2\leqslant k_3$, 则利用命题5.4.3; 如果$|k_2-k_3|\leqslant 5, 1\leqslant k_1\leqslant k_2-5$, 则利用命题5.4.6 (b). 因此(5.4.30)得证.

为证明命题5.4.12, 只要再证

$$\|B(u,v)\|_{\bar X_0}\leqslant C(\|u\|_{\bar F^s}\|v\|_{\bar F^{-3/4}}+\|u\|_{\bar F^{-3/4}}\|v\|_{\bar F^s}). \tag{5.4.31}$$

对u,v做二进分解得

$$\|B(u,v)\|_{\bar X_0}\leqslant\sum_{k_2,k_3\geqslant 0}\|B(\Delta_{k_2}u,\Delta_{k_3}v)\|_{\bar X_0}.$$

如果$\max(k_2,k_3)\leqslant 10$, 则由命题5.4.13和命题5.4.5得到

$$\|B(\Delta_{k_2}u,\Delta_{k_3}v)\|_{\bar X_0}\lesssim\|\Delta_{k_2}u\|_{L_t^\infty L_x^2}\|\Delta_{k_3}v\|_{L_t^\infty L_x^2},$$

由此推出(5.4.31). 如果$\max(k_2,k_3)\geqslant 10$, 则一定有$|k_2-k_3|\leqslant 5$. 从而利用命题5.4.10我们得到

$$\begin{aligned}\|B(u,v)\|_{\bar X_0}\leqslant&\sum_{|k_2-k_3|\leqslant 5,\ k_2,k_3\geqslant 10}2^{-3k_2/2}\|\mathscr F(\Delta_{k_2}u)\|_{X_{k_2}}\|\mathscr F(\Delta_{k_3}v)\|_{X_{k_3}}\\&\lesssim\|u\|_{\bar F^{-3/4}}\|v\|_{\bar F^{-3/4}}\end{aligned}$$

由此推出(5.4.31). 命题得证. □

类似于命题5.1.7(a)的证明, 且应用引理5.1.8, 很容易证明如下命题.

命题5.4.13. 假设$s \in \mathbb{R}$以及$\phi \in H^s$. 则存在常数$C > 0$使得

$$\|\psi(t)S(t)\phi\|_{\bar{F}^s} \leqslant C\|\phi\|_{H^s}.$$

为了证明定理5.4.9, 我们需要如下的双线性压缩映射原理, 它的证明很容易, 留给读者思考.

引理5.4.14. 设$(X, \|\cdot\|)$是一个Banach空间, $\|\cdot\|$是其上的范数. 假设$B: X \times X \to X$是一个双线性算子满足

$$\|B(x_1, x_2)\| \leqslant \eta\|x_1\|\|x_2\|, \quad \forall\ x_1, x_2 \in X,$$

则对任意的$y \in X$且满足$4\eta\|y\| < 1$, 方程$x = y + B(x, x)$存在一个唯一解$x \in X$满足$\|x\| < \frac{1}{2\eta}$.

用引理5.4.14, 命题5.4.12和命题5.4.13, 则得到方程(5.3.1)在$t \in [-T, T]$的解u使得$\|u\|_{\bar{F}^{-3/4}(T)} \leqslant C\epsilon_0$. 因此定理5.4.9(a)得证, 定理5.4.9的其余部分皆可类似得到.

§5.5 I-方法

在前两节, 我们讨论了KdV方程的局部适定性, 应用压缩映射原理构造了KdV方程的局部解. 在这一节我们主要研究如何把局部解延拓到时间全局, 即对任意的时间$T > 0$, KdV方程是否在$t \in [-T, T]$存在唯一解? 这就是整体适定性所说的内容. KdV方程(5.3.1)是一个完全可积系统, 因而有无穷多个守恒律, 利用这些守恒律可以得到先验估计: 如果u是KdV方程(5.3.1)的光滑解, 则对任意的时间$k \in N \cup \{0\}$以及任意的时间$T > 0$有

$$\|u(t)\|_{H^k} \leqslant C(T, \|u_0\|_{H^k}),\ \forall\ t \in [-T, T]. \tag{5.5.1}$$

利用这个先验估计以及前两节得到的局部适定性, 从而立即得到如下结论: KdV方程在H^k中整体适定, 其中$k \in N \cup \{0\}$. 对比局部适定性的结果, 自然会问当$s \in [-3/4, 0)$时KdV方程在H^s中是否是整体适定的? 此时, 没有负正则性的守恒律可以用, 从而不能直接得到整体适定性, I-方法正是研究这样一类问题的有效的方法, 是由J. Colliander, M. Keel, G. Staffilani, H. Takaoka, 和T. Tao[30]在Bourgain 的频率分解技巧[17]的基础上发展的.

现在来简单地介绍一下I-方法的基本想法. 首先回顾(5.5.1)中$k = 0, 1$情形的推导. 在方程(5.3.1)的两边同时乘以u, 然后关于空间变量x积分可得

$$\frac{d}{dt}\left(\|u(t)\|_{L^2}^2\right) = 0,$$

从而得到了$k=0$的情形. 对于$k=1$的情形, 可知如下的式子

$$\frac{d}{dt}\left(\|u(t)\|_{H^1}^2\right)=0$$

是不成立的, 原因在于量$\|u(t)\|_{H^1}$不能开发方程的结构. 自然地想, 是否存在这样一个与解u相关的量$Q_1(u(t))$满足

$$Q_1(u(t))\sim\|u(t)\|_{H^1}^2,\quad \frac{d}{dt}[Q_1(u(t))]=0.$$

如果能找到, 则可得$\forall\ t\in\mathbb{R}$

$$\|u(t)\|_{H^1}\sim\|Q_1(u(t))\|=\|Q_1(u_0)\|\lesssim\|u_0\|_{H^1},$$

此即$k=1$的情形. 现在我们知这样的量是存在的, 例如可取

$$Q_1(u(t))=\int_{\mathbb{R}}u_x^2-\frac{1}{3}u^3+Cu^2dx.$$

事实上, 易知$\frac{d}{dt}[Q(u(t))]=0$, 只需要再证$Q_1(u(t))\sim\|u(t)\|_{H^1}^2$即可. 由Gagliardo-Nirenberg不等式有

$$\|u\|_{L^3}^3\lesssim\|u\|_{L^2}^{5/2}\|u_x\|_{L^2}^{1/2}.$$

再利用不等式

$$ab\leqslant\frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q},1<p\leqslant q<\infty,1/p+1/q=1,$$

且取$q=4$得

$$\|u\|_{L^3}^3\leqslant\frac{3\|u\|_{L^2}^{10/3}}{4}+\frac{\|u_x\|_{L^2}^2}{4}\leqslant\frac{3\|u_0\|_{L^2}^{4/3}\|u\|_{L^2}^2}{4}+\frac{\|u_x\|_{L^2}^2}{4},$$

因此取$C=\|u_0\|_{L^2}^{4/3}$就满足要求.

根据这个想法, 对于一般的H^s范数, 我们同样需要去找这样的一个量$Q_s(u(t))$, 它具有类似$Q_1(u(t))$的性质, 但是我们知要求$Q_s(u(t))$完全守恒在$s<0$时是不可能的, 从而希望$Q_s(u(t))$增长比较缓慢. 如何构造$Q_s(u(t))$以及描述"增长缓慢", 在I-方法中对此做了系统的研究.

给定$m:\mathbb{R}^k\to\mathbb{C}$是一个函数, 称$m$是对称的是指:

$$m(\xi_1,\cdots,\xi_k)=m(\sigma(\xi_1,\cdots,\xi_k))$$

对所有的$\sigma \in S_k$, 其中S_k是k个元素的置换群. 函数m的对称化是指:

$$[m]_{sym}(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_k) = \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} m(\sigma(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_k)).$$

对给定的函数m, 定义一个作用在k个函数上$u_1, \cdots, u_k$(这时称m是k-乘子)k-线性泛函:

$$\Lambda_k(m; u_1, \cdots, u_k) = \int_{\xi_1+\cdots+\xi_k=0} m(\xi_1, \cdots, \xi_k)\widehat{u_1}(\xi_1) \cdots \widehat{u_k}(\xi_k).$$

通常将Λ_k作用到k个相同的函数u. 为了方便, $\Lambda_k(m; u, \cdots, u)$简记成$\Lambda_k(m)$. 由测度的对称性知$\Lambda_k(m) = \Lambda_k([m]_{sym})$. 由KdV方程(5.3.1)可以直接验证如下命题:

命题5.5.1. *假设u满足方程(5.3.1)且m是一个对称的函数, 则有*

$$\frac{d\Lambda_k(m)}{dt} = \Lambda_k(mh_k) - \frac{ik}{2}\Lambda_{k+1}\big(m(\xi_1, \cdots, \xi_{k-1}, \xi_k + \xi_{k+1})(\xi_k + \xi_{k+1})\big),$$

其中

$$h_k = i(\xi_1^3 + \xi_2^3 + \cdots + \xi_k^3).$$

下面引入I-算子的定义. 设$m : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$是给定的实值偶函数, 定义Fourier乘子算子$Iu$如下:

$$\widehat{Iu}(\xi) = m(\xi)\widehat{u}. \tag{5.5.2}$$

定义修正能量$E_I^2(t)$如下:

$$E_I^2(t) = \|Iu\|_{L^2}^2.$$

注意$E_I^2(t)$中的2表示上指标而不是幂次. 由m是实值的偶函数, u是实值函数, 利用Plancherel等式有

$$E_I^2(t) = \Lambda_2(m(\xi_1)m(\xi_2)).$$

利用命题5.5.1可得

$$\frac{d}{dt}E_I^2(t) = \Lambda_2(m(\xi_1)m(\xi_2)h_2) - i\Lambda_3(m(\xi_1)m(\xi_2 + \xi_3)(\xi_2 + \xi_3)).$$

因为在$\xi_1 + \xi_2 = 0$上有$\xi_1^3 + \xi_2^3 = 0$, 从而第一项为0. 将第二项对称化可得

$$\frac{d}{dt}E_I^2(t) = \Lambda_3(-i[m(\xi_1)m(\xi_2 + \xi_3)(\xi_2 + \xi_3)]_{sym}).$$

记

$$M_3(\xi_1,\xi_2,\xi_3) = -i[m(\xi_1)m(\xi_2+\xi_3)(\xi_2+\xi_3)]_{sym}.$$

定义新的修正能量

$$E_I^3(t) = E_I^2(t) + \Lambda_3(\sigma_3),$$

其中对称函数σ_3待定, 目的是构造一个消失性. 由命题5.5.1得

$$\frac{d}{dt}E_I^3(t) = \Lambda_3(M_3) + \Lambda_3(\sigma_3 h_3) - \frac{3}{2}i\Lambda_4(\sigma_3(\xi_1,\xi_2,\xi_3+\xi_4)(\xi_3+\xi_4)). \quad (5.5.3)$$

取

$$\sigma_3 = -\frac{M_3}{h_3}$$

使得(5.5.3)中两个三线性项消去. 如果记

$$M_4(\xi_1,\xi_2,\xi_3,\xi_4) = -i\frac{3}{2}[\sigma_3(\xi_1,\xi_2,\xi_3+\xi_4)(\xi_3+\xi_4)]_{sym}$$

则

$$\frac{d}{dt}E_I^3(t) = \Lambda_4(M_4).$$

同样地再定义一个新的修正能量

$$E_I^4(t) = E_I^3(t) + \Lambda_4(\sigma_4),$$

其中

$$\sigma_4 = -\frac{M_4}{h_4},$$

容易得到

$$\frac{d}{dt}E_I^4(t) = \Lambda_5(M_5)$$

其中

$$M_5(\xi_1,\ldots,\xi_5) = -2i[\sigma_4(\xi_1,\xi_2,\xi_3,\xi_4+\xi_5)(\xi_4+\xi_5)]_{sym}.$$

这一过程可以一直继续下去, 但是我们只需要修正到这一步就够用了.

为了给出$\|u\|_{H^s}$的控制, 似乎取$m(\xi)=\langle\xi\rangle^s$比较合适, 然而这一选取, 我们不知道如何控制修正能量的增长速度. 基于L^2中的守恒律, 我们选取乘子m如下: m是一个光滑的偶函数且具有形式

$$m(\xi)=\begin{cases}1, & |\xi|<N,\\ N^{-s}|\xi|^s, & |\xi|>2N.\end{cases} \tag{5.5.4}$$

容易看出如果当$N\to\infty$时有$Iu\to u$, 从而知修正能量$E_I^k(t)$的增长速度趋于0当$N\to\infty$, 那么首要关心趋于0的速度是怎样的?. 当m具有(5.5.4)的形式, 则容易验证m^2满足

$$\begin{cases}m^2(\xi)\sim m^2(\xi') \text{ 如果}|\xi|\sim|\xi'|,\\ (m^2)'(\xi)=O(\frac{m^2(\xi)}{|\xi|}),\\ (m^2)''(\xi)=O(\frac{m^2(\xi)}{|\xi|^2}).\end{cases} \tag{5.5.5}$$

接下来要做乘子M_3,M_4,M_5的乘子估计. 这里将利用两个平均值公式: 如果$|\eta|,|\lambda|\ll|\xi|$则

$$|a(\xi+\eta)-a(\xi)|\lesssim|\eta|\sup_{|\xi'|\sim|\xi|}|a'(\xi')|, \tag{5.5.6}$$

以及

$$|a(\xi+\eta+\lambda)-a(\xi+\eta)-a(\xi+\lambda)+a(\xi)|\lesssim|\eta||\lambda|\sup_{|\xi'|\sim|\xi|}|a''(\xi')|. \tag{5.5.7}$$

这两个估计可立即由微积分基本定理得到.

首先来看M_3的估计.

命题5.5.2. 设m如(5.5.4)所示, 在集合$\{\xi_1+\xi_2+\xi_3=0,|\xi_i|\sim N_i\}$其中$N_i$为二进数, 则有

$$|M_3(\xi_1,\xi_2,\xi_3)|\lesssim\max(m^2(\xi_1),m^2(\xi_2),m^2(\xi_3))\min(N_1,N_2,N_3).$$

证明. 由对称性可假设$N_1=N_2\geqslant N_3$. 如果$N_3\gtrsim N_1$, 则由m的定义直接可得. 如果$N_3\ll N_1$, 则由中值公式得

$$m^2(\xi_1)\xi_1-m^2(\xi_1+\xi_3)(\xi_1+\xi_3)+m^2(\xi_3)\xi_3\leqslant\max(m^2(\xi_1),m^2(\xi_2))N_3.$$

因此命题得证. □

为了做M_4的估计, 我们先将乘子σ_3从超平面上延拓到整个空间上以便应用中值公式.

命题5.5.3. 如果m具有形式(5.5.4), 则对任意的二进制数$\lambda \leqslant \mu$都存在σ_3的从对角面$\{\xi_1+\xi_2+\xi_3=0, |\xi_1|\sim\lambda,\ |\xi_2|,\ |\xi_3|\sim\mu\}$至整个空间的延拓$\{(\xi_1,\xi_2,\xi_3)\in\mathbb{R}^3, |\xi_1|\sim\lambda,\ |\xi_2|,\ |\xi_3|\sim\mu\}$, 并且满足

$$|\partial_1^{\beta_1}\partial_2^{\beta_2}\partial_3^{\beta_3}\sigma_3(\xi_1,\xi_2,\xi_3)|\leqslant Cm^2(\lambda)\mu^{-2}\lambda^{-\beta_1}\mu^{-\beta_2-\beta_3}, \tag{5.5.8}$$

其中常数C不依赖于λ,μ.

证明. 因为在超平面上$\{(\xi_1,\xi_2,\xi_3):\xi_1+\xi_2+\xi_3=0\}$有

$$h_3=i(\xi_1^3+\xi_2^3+\xi_3^3)=3i\xi_1\xi_2\xi_3,$$

则知$|h|\sim\lambda\mu^2$, 又

$$\begin{aligned}M_3(\xi_1,\xi_2,\xi_3)=&-i[m(\xi_1)m(\xi_2+\xi_3)(\xi_2+\xi_3)]_{sym}\\=&i(m^2(\xi_1)\xi_1+m^2(\xi_2)\xi_2+m^2(\xi_3)\xi_3),\end{aligned}$$

分情况讨论. 如果$\lambda\sim\mu$, 则如下延拓σ_3

$$\sigma_3(\xi_1,\xi_2,\xi_3)=-\frac{i(m^2(\xi_1)\xi_1+m^2(\xi_2)\xi_2+m^2(\xi_3)\xi_3)}{3i\xi_1\xi_2\xi_3},$$

容易验证满足命题要求. 如果$\lambda\ll\mu$, 则如下延拓σ_3

$$\sigma_3(\xi_1,\xi_2,\xi_3)=-\frac{i(m^2(\xi_1)\xi_1+m^2(\xi_2)\xi_2-m^2(\xi_1+\xi_2)(\xi_1+\xi_2))}{3i\xi_1\xi_2\xi_3}.$$

由(5.5.6)和(5.5.5)得(5.5.8)成立. □

现在可以给出σ_4的逐点估计. 这里的方法是由作者[57]给出的, 对比[30]中的方法, 这里的方法更有一般性, 能处理一类对称性没那么好的色散方程, 但是基本的想法是一样的.

命题5.5.4. 设m具有形式(5.5.4). 则在区域$|\xi_i|\sim N_i, |\xi_j+\xi_k|\sim N_{jk}$, 其中$N_i, N_{jk}$为二进制数, 有

$$\frac{|M_4(\xi_1,\xi_2,\xi_3,\xi_4)|}{|h_4|}\lesssim\frac{m^2(\min(N_i,N_{jk}))}{(N+N_1)(N+N_2)(N+N_3)(N+N_4)}. \tag{5.5.9}$$

证明. 由对称性可以假设$N_1\geqslant N_2\geqslant N_3\geqslant N_4$. 因为Since $\xi_1+\xi_2+\xi_3+\xi_4=0$, 所以有$N_1\sim N_2$. 不妨假设$N_1\sim N_2\gtrsim N$, 否则$M_4$为零, 因为若$|\xi|\leqslant$

N时$m^2(\xi)=1$，如果$\max(N_{12},N_{13},N_{14})\ll N_1$，则$\xi_3\approx-\xi_1$，$\xi_4\approx-\xi_1$，这与$\xi_1+\xi_2+\xi_3+\xi_4=0$矛盾．式子(5.5.9)的右边项如下

$$\frac{m^2(\min(N_i,N_{jk}))}{{N_1}^2(N+N_3)(N+N_4)}. \tag{5.5.10}$$

由于在超平面$\xi_1+\xi_2+\xi_3+\xi_4=0$有

$$h_4=\xi_1^3+\xi_2^3+\xi_3^3+\xi_4^3=3(\xi_1+\xi_2)(\xi_1+\xi_3)(\xi_1+\xi_4),$$

从而得

$$\begin{aligned}
&CM_4(\xi_1,\xi_2,\xi_3,\xi_4)\\
=&[\sigma_3(\xi_1,\xi_2,\xi_3+\xi_4)(\xi_3+\xi_4)]_{sym}\\
=&\sigma_3(\xi_1,\xi_2,\xi_3+\xi_4)(\xi_3+\xi_4)+\sigma_3(\xi_1,\xi_3,\xi_2+\xi_4)(\xi_2+\xi_4)\\
&+\sigma_3(\xi_1,\xi_4,\xi_2+\xi_3)(\xi_2+\xi_3)+\sigma_3(\xi_2,\xi_3,\xi_1+\xi_4)(\xi_1+\xi_4)\\
&+\sigma_3(\xi_2,\xi_4,\xi_1+\xi_3)(\xi_1+\xi_3)+\sigma_3(\xi_3,\xi_4,\xi_1+\xi_2)(\xi_1+\xi_2)\\
=&[\sigma_3(\xi_1,\xi_2,\xi_3+\xi_4)-\sigma_3(-\xi_3,-\xi_4,\xi_3+\xi_4)](\xi_3+\xi_4)\\
&+[\sigma_3(\xi_1,\xi_3,\xi_2+\xi_4)-\sigma_3(-\xi_2,-\xi_4,\xi_2+\xi_4)](\xi_2+\xi_4)\\
&+[\sigma_3(\xi_1,\xi_4,\xi_2+\xi_3)-\sigma_3(-\xi_2,-\xi_3,\xi_2+\xi_3)](\xi_2+\xi_3)\\
:=&I+II+III.
\end{aligned} \tag{5.5.11}$$

将分情况讨论来得到(5.5.9).

情形1. $|N_4|\gtrsim\frac{N}{2}$.

情形1a. $N_{12},N_{13},N_{14}\gtrsim N_1$.

对于这个情形，直接由(5.5.8)可以得到

$$\frac{|M_4(\xi_1,\xi_2,\xi_3,\xi_4)|}{|h_4|}\lesssim\frac{m^2(N_4)}{N_1N_2N_3N_4}, \tag{5.5.12}$$

情形1b. $N_{12}\ll N_1$，$N_{13}\gtrsim N_1$，$N_{14}\gtrsim N_1$.

首先考虑项I的贡献．由(5.5.8)得

$$\frac{|I|}{|h_4|}\lesssim\frac{m^2(\min(N_4,N_{12}))}{N_1N_2N_3N_4}, \tag{5.5.13}$$

齐次考虑II的贡献．如果$N_{12}\gtrsim N_3$，则利用(5.5.6)和(5.5.8)，如果$N_{12}\ll N_3$，则利用(5.5.6)两次和(5.5.8)，可得

$$\frac{II}{h_4}\lesssim\frac{m^2(N_4)}{N_1N_1N_1N_3}. \tag{5.5.14}$$

由对称性, 项III的贡献与项II的讨论完全一样.

情形1c. $N_{12} \ll N_1$, $N_{13} \ll N_1$, $N_{14} \gtrsim N_1$.

因为$N_{12} \ll N_1$, $N_{13} \ll N_1$, 则$N_1 \sim N_2 \sim N_3 \sim N_4$.

首先考虑项I的贡献. 由于

$$\begin{aligned} I =&[\sigma_3(\xi_1,\xi_2,\xi_3+\xi_4)-\sigma_3(-\xi_3,\xi_2,\xi_3+\xi_4)](\xi_3+\xi_4)\\ &+[\sigma_3(-\xi_3,\xi_2,\xi_3+\xi_4)-\sigma_3(-\xi_3,-\xi_4,\xi_3+\xi_4)](\xi_3+\xi_4)\\ =&I_1+I_2. \end{aligned}$$

利用(5.5.8), (5.5.6)可得

$$\frac{I}{|h_4|} \lesssim \frac{I_1}{|h_4|} + \frac{I_2}{|h_4|} \lesssim \frac{m^2(N_{12})}{N_1^4}.$$

项II的贡献与项I的讨论完全一样.

最后考虑项III的贡献. 由于

$$\begin{aligned} III =&1/2[\sigma_3(\xi_1,\xi_4,\xi_2+\xi_3)-\sigma_3(-\xi_2,-\xi_3,\xi_2+\xi_3)\\ &-\sigma_3(-\xi_3,-\xi_2,\xi_2+\xi_3)+\sigma_3(\xi_4,\xi_1,\xi_2+\xi_3)](\xi_2+\xi_3). \end{aligned}$$

利用四次(5.5.7)式可得

$$\frac{III}{|h_4|} \lesssim \frac{m^2(N_1)}{N_1^4}.$$

情形1d. $N_{12} \ll N_1$, $N_{13} \gtrsim N_1$, $N_{14} \ll N_1$.

这个情形与情形1c的讨论完全一样.

情形2. $N_4 \ll N/2$.

易知在这一情形有$m^2(\min(N_i, N_{jk})) = 1$, 以及$N_{13} \sim |\xi_1+\xi_3| = |\xi_2 + \xi_4| \sim N_1$.

情形2a. $N_1/4 > N_{12} \gtrsim N/2$.

因为$N_4 \ll N/2$且$|\xi_3+\xi_4| = |\xi_1+\xi_2| \gtrsim N/2$, 因此$N_3 \gtrsim N/2$. 由$|h_4| \sim N_{12}N_1^2$, 则分别控制(5.5.11)的六项可得

$$\frac{|M_4|}{|h_4|} \lesssim \frac{1}{N_1^2 N_3 N}, \tag{5.5.15}$$

情形2b. $N_{12} \ll N/2$.

由于$N_{12}=N_{34}\ll N/2$且$N_4\ll N/2$, 则一定有$N_3\ll N/2$, and $N_{13}\sim N_{14}\sim N_1$.

首先考虑项I的贡献. 因为$N_3,N_4,N_{34}\ll N/2$, 所以由m的定义立即有$\sigma_3(-\xi_3,-\xi_4,\xi_3+\xi_4)=0$. 利用(5.5.8)得

$$\frac{|I|}{|h_4|}\lesssim\frac{|\sigma_3(\xi_1,\xi_2,\xi_3+\xi_4)|}{N_1^2}\lesssim\frac{1}{N_1^4}. \tag{5.5.16}$$

齐次考虑II和III的贡献. 因为此时有两个小的项N_3,N_4,N_{12}出现在分母会带来麻烦, 从而不能单独每个项而必须开发两项中的消失性. 由于

$$\begin{aligned}II+III=&[\sigma_3(\xi_1,\xi_3,\xi_2+\xi_4)-\sigma_3(-\xi_2,-\xi_4,\xi_2+\xi_4)](\xi_2+\xi_4)\\&+[\sigma_3(\xi_1,\xi_4,\xi_2+\xi_3)-\sigma_3(-\xi_2,-\xi_3,\xi_2+\xi_3)](\xi_2+\xi_3)\\=&[\sigma_3(\xi_1,\xi_3,\xi_2+\xi_4)-\sigma_3(-\xi_2,-\xi_4,\xi_2+\xi_4)]\xi_4\\&+[\sigma_3(\xi_1,\xi_4,\xi_2+\xi_3)-\sigma_3(-\xi_2,-\xi_3,\xi_2+\xi_3)]\xi_3\\&+[\sigma_3(\xi_1,\xi_3,\xi_2+\xi_4)-\sigma_3(-\xi_2,-\xi_4,\xi_2+\xi_4)\\&\quad+\sigma_3(\xi_1,\xi_4,\xi_2+\xi_3)-\sigma_3(-\xi_2,-\xi_3,\xi_2+\xi_3)]\xi_2\\=&J_1+J_2+J_3.\end{aligned} \tag{5.5.17}$$

首先考虑J_1. 由于

$$\frac{|J_1|}{|h_4|}\leqslant\frac{|[\sigma_3(\xi_1,\xi_3,\xi_2+\xi_4)-\sigma_3(-\xi_2,-\xi_4,\xi_2+\xi_4)]\xi_4|}{|h_4|} \tag{5.5.18}$$

如果$N_{12}\ll N_3$ (此时有$N_3\sim N_4$), 则利用(5.5.6)两次, 否则用(5.5.6)一次和(5.5.8), 则可以得到

$$\frac{|J_1|}{|h_4|}\lesssim\frac{1}{N_1^4}.$$

J_2与J_1是一样的, 现在考虑J_3. 首先假设$N_{12}\gtrsim N_3$. 由σ_3的对称性得

$$\begin{aligned}J_3=&[\sigma_3(\xi_1,\xi_3,\xi_2+\xi_4)-\sigma_3(-\xi_2-\xi_3,\xi_3,\xi_2)\\&+\sigma_3(\xi_1,\xi_4,\xi_2+\xi_3)-\sigma_3(-\xi_2-\xi_4,\xi_4,\xi_2)]\xi_2.\end{aligned}$$

由(5.5.6)式且$N_{12}\gtrsim N_3$可得

$$\frac{|J_3|}{|h_4|}\lesssim\frac{1}{N_1^4}.$$

如果$N_{12} \ll N_3$, 则$N_3 \sim N_4$. 将J_3重新写成如下形式

$$\begin{aligned}J_3 =&[\sigma_3(-\xi_2,\xi_3,\xi_2+\xi_4)-\sigma_3(-\xi_2,-\xi_4,\xi_2+\xi_4)\\&+\sigma_3(\xi_1,\xi_4,\xi_2+\xi_3)-\sigma_3(\xi_1,-\xi_3,\xi_2+\xi_3)]\xi_2\\&+[\sigma_3(\xi_1,\xi_3,\xi_2+\xi_4)-\sigma_3(-\xi_2,\xi_3,\xi_2+\xi_4)\\&+\sigma_3(\xi_1,-\xi_3,\xi_2+\xi_3)-\sigma_3(-\xi_2,-\xi_3,\xi_2+\xi_3)]\xi_2\\=&J_{31}+J_{32}.\end{aligned}$$

用(5.5.6)式立即可得

$$\frac{|J_{32}|}{|h_4|}\lesssim\frac{1}{N_1^4}. \tag{5.5.19}$$

只要再控制J_{31}. 因为此时有$m^2(\xi_3)=m^2(\xi_4)=1$, 从而得

$$\begin{aligned}J_{31} =&[\sigma_3(-\xi_2,\xi_3,\xi_2+\xi_4)-\sigma_3(\xi_1,-\xi_3,\xi_2+\xi_3)\\&-\sigma_3(-\xi_2,-\xi_4,\xi_2+\xi_4)+\sigma_3(\xi_1,\xi_4,\xi_2+\xi_3)]\xi_2\\=&\frac{-m^2(\xi_2)\xi_2+\xi_3+m^2(\xi_2+\xi_4)(\xi_2+\xi_4)}{-\xi_2\xi_3(\xi_2+\xi_4)}\xi_2\\&-\frac{-m^2(\xi_2)\xi_2-\xi_4+m^2(\xi_2+\xi_4)(\xi_2+\xi_4)}{\xi_2\xi_4(\xi_2+\xi_4)}\xi_2\\&+\frac{m^2(\xi_1)\xi_1+\xi_4+m^2(\xi_2+\xi_3)(\xi_2+\xi_3)}{\xi_1\xi_4(\xi_2+\xi_3)}\xi_2\\&-\frac{m^2(\xi_1)\xi_1-\xi_3+m^2(\xi_2+\xi_3)(\xi_2+\xi_3)}{-\xi_1\xi_3(\xi_2+\xi_3)}\xi_2.\end{aligned}$$

注意到此时有一个消失性, 因此有

$$\begin{aligned}J_{31}=&-\frac{\xi_3+\xi_4}{\xi_3\xi_4}\frac{-m^2(\xi_2)\xi_2+m^2(\xi_2+\xi_4)(\xi_2+\xi_4)}{\xi_2(\xi_2+\xi_4)}\xi_2\\&+\frac{\xi_3+\xi_4}{\xi_3\xi_4}\frac{m^2(\xi_1)\xi_1+m^2(\xi_2+\xi_3)(\xi_2+\xi_3)}{\xi_1(\xi_2+\xi_3)}\xi_2.\end{aligned} \tag{5.5.20}$$

将(5.5.20)重新写成如下形式

$$\begin{aligned}&-\tfrac{\xi_3+\xi_4}{\xi_3\xi_4}\tfrac{-m^2(\xi_2)\xi_2+m^2(\xi_2+\xi_4)(\xi_2+\xi_4)+m^2(\xi_1)\xi_1+m^2(\xi_2+\xi_3)(\xi_2+\xi_3)}{\xi_2(\xi_2+\xi_4)}\xi_2\\&+\tfrac{\xi_3+\xi_4}{\xi_3\xi_4}[m^2(\xi_1)\xi_1+m^2(\xi_2+\xi_3)(\xi_2+\xi_3)][\tfrac{1}{\xi_1(\xi_2+\xi_3)}+\tfrac{1}{\xi_2(\xi_2+\xi_4)}]\xi_2.\end{aligned}$$

因此, 对第一项利用(5.5.7), 对第二项利用(5.5.6)我们终于得到

$$\frac{|J_{31}|}{|h_4|}\lesssim\frac{1}{N_1^4},$$

从而命题得证. □

从σ_4的估计立即可得M_5的估计.

命题5.5.5. 如果m具有形式(5.5.4), 则

$$|M_5(\xi_1,\ldots,\xi_5)| \lesssim \left[\frac{m^2(N_{*45})N_{45}}{(N+N_1)(N+N_2)(N+N_3)(N+N_{45})}\right]_{sym},$$

其中

$$N_{*45}=\min(N_1,N_2,N_3,N_{45},N_{12},N_{13},N_{23}).$$

接下来要做两件事情. 一是证明修正能量$E_I^4(t)$增长比较缓慢, 二是证明它和修正能量$E_I^2(t)$比较接近. 为控制$E_I^4(t)$的增长, 只需要控制其导数

$$\frac{d}{dt}E_I^4(t)=\Lambda_5(M_5).$$

命题5.5.6. 设$I\subset\mathbb{R}$且$|I|\lesssim 1$. 令$0\leqslant k_1\leqslant\ldots\leqslant k_5$且$k_4\geqslant 10$. 则有

$$\left|\int_I\int\prod_{i=1}^5 P_{k_i}(w_i)(x,t)dxdt\right| \lesssim 2^{\frac{5(k_1+k_2+k_3)}{12}}2^{-k_4-k_5}\prod_{j=1}^5\|\widehat{\Delta_{k_j}(w_j)}\|_{X_{k_j}}, \quad (5.5.21)$$

其中在右边如果$k_j=0$则用$\bar{X}_{k_j}$代替X_{k_j}.

证明. 由Hölder不等式得到(5.5.21)的左边项小于等于

$$\prod_{i=1}^3\|\Delta_{k_i}(w_i)\|_{L_x^3L_{t\in I}^\infty}\cdot\|\Delta_{k_4}(w_4)\|_{L_x^\infty L_t^2}\cdot\|\Delta_{k_5}(w_5)\|_{L_x^\infty L_t^2}.$$

对于$\|\Delta_{k_4}(w_4)\|_{L_x^\infty L_t^2}$以及$\|\Delta_{k_5}(w_5)\|_{L_x^\infty L_t^2}$我们利用命题5.4.1即得控制.

对于项$\|\Delta_{k_i}(w_i)\|_{L_x^3L_{t\in I}^\infty}$我们对$\|\Delta_{k_i}(w_i)\|_{L_x^2L_{t\in I}^\infty}$和$\|\Delta_{k_i}(w_i)\|_{L_x^4L_{t\in I}^\infty}$用插值定理以及命题5.4.1可得. □

命题5.5.7. 设$\delta\lesssim 1$. 假设m如(5.5.4)给出且$s=-3/4$, 则

$$\left|\int_0^\delta\Lambda_5(M_5;u_1,\cdots,u_5)dt\right|\lesssim N^{-15/4}\prod_{j=1}^5\|I(u_j)\|_{\bar{F}^0(\delta)}. \quad (5.5.22)$$

证明. 根据命题5.5.5, 可得(5.5.22)式的左边小于等于

$$\sum_{k_i\geqslant 0}\left|\int_0^\delta\Lambda_5\left(\frac{N_{45}m^2(N_{*45})}{(N+N_1)(N+N_2)(N+N_3)(N+N_{45})\prod_{i=1}^5 m(N_i)};P_{k_1}u_1,\cdots,P_{k_5}u_5\right)dt\right|$$

$$\lesssim N^{-\frac{15}{4}}\prod_{i=1}^{5}\|u_j\|_{\bar{F}^0(\delta)},$$

其中$N_i=2^{k_i}$. 消去$\frac{N_{*45}}{(N+N_{45})}\leqslant 1$以及仅考虑最坏的情形$m^2(N_{*45})=1$. 从而只要证

$$\sum_{k_1,\cdots,k_5\geqslant 0}\left|\int_0^{\delta}\Lambda_5\left(\prod_{i=1}^{3}\frac{1}{(N+N_i)m(N_i)}\frac{1}{m(N_4)}\frac{1}{m(N_5)};P_{k_1}u_1,\cdots,P_{k_5}u_5\right)dt\right|$$
$$\lesssim N^{-\frac{15}{4}}\prod_{i=1}^{5}\|u_j\|_{\bar{F}^0(\delta)}.$$

由对称性可以假设$N_1\geqslant N_2\geqslant N_3$以及$N_4\geqslant N_5$且至少有两个$N_i$满足$N_i\gtrsim N$. 固定延拓$\widetilde{u}_i$使得$\|\widetilde{u}_i\|_{\bar{F}^0}\lesssim 2\|u_i\|_{\bar{F}^0(\delta)}$. 为符号简单起见, 仍记为$u_i$.

根据(5.5.4)并且$s=-3/4$, 很容易看出$\frac{1}{(N+N_i)m(N_i)}\lesssim N^{-3/4}\langle N_i\rangle^{-1/4}$以及

$$\frac{1}{m(N_4)m(N_5)}\lesssim N^{-3/2}N_4^{3/4}N_5^{3/4}.$$

因此需要控制

$$N^{-\frac{15}{4}}\sum_{k_i}\int_0^{\delta}\Lambda_5\left(\prod_{i=1}^{3}\langle N_i\rangle^{-1/4}N_4^{3/4}N_5^{3/4};u_1,\cdots,u_5\right)dt. \tag{5.5.23}$$

如果$N_2\sim N_1\gtrsim N$, $N_4\lesssim N_2$, 只考虑最坏的情形$N_1\geqslant N_2\geqslant N_4\geqslant N_5\geqslant N_3$. 由(5.5.21)得

$$\begin{aligned}(5.5.23)&\lesssim N^{-\frac{15}{4}}\sum_{N_i}\langle N_1\rangle^{-5/4}\langle N_2\rangle^{-5/4}\langle N_3\rangle^{1/6}N_4^{7/6}N_5^{7/6}\prod_{i=1}^{5}\|\widehat{P_{k_i}u}\|_{X_{k_i}}\\&\lesssim N^{-\frac{15}{4}}\prod_{j=1}^{5}\|Iu_j\|_{\bar{F}^0(\delta)}.\end{aligned} \tag{5.5.24}$$

剩余的情形$N_4\sim N_5\gtrsim N$, $N_1\lesssim N_5$ 或$N_1\sim N_4\gtrsim N$可以类似处理, 从略. □

下面的命题告诉我们$E_I^4(t)$和$E_I^2(t)$是非常接近的.

命题5.5.8. *假设I是由m定义的Fourier乘子算子, 其中m如(5.5.4)所示且$s=-3/4$. 则*

$$|E_I^4(t)-E_I^2(t)|\lesssim\|Iu(t)\|_{L^2}^3+\|Iu(t)\|_{L^2}^4.$$

证明. 因为$E_I^4(t)=E_I^2+\Lambda_3(\sigma_3)+\Lambda_4(\sigma_4)$, 从而只要证

$$|\Lambda_3(\sigma_3;u_1,u_2,u_3)|\lesssim\prod_{j=1}^{3}\|Iu_j(t)\|_{L^2}, \tag{5.5.25}$$

以及

$$|\Lambda_4(\sigma_4;u_1,u_2,u_3,u_4)|\lesssim\prod_{j=1}^{4}\|Iu_j(t)\|_{L^2}. \tag{5.5.26}$$

我们可以假设$\widehat{u_j}$是非负的. 为证明(5.5.25), 只要证

$$\left|\Lambda_3\left(\frac{m^2(\xi_1)\xi_1+m^2(\xi_2)\xi_2+m^2(\xi_3)\xi_3}{\xi_1\xi_2\xi_3 m(\xi_1)m(\xi_2)m(\xi_3)};u_1,u_2,u_3\right)\right|\lesssim\prod_{i=1}^{3}\|u_j\|_2. \tag{5.5.27}$$

做频率二进制分解, 可得(5.5.27)式的左边小于等于

$$\sum_{k_i\geqslant 0}\left|\Lambda_3\left(\frac{m^2(\xi_1)\xi_1+m^2(\xi_2)\xi_2+m^2(\xi_3)\xi_3}{\xi_1\xi_2\xi_3 m(\xi_1)m(\xi_2)m(\xi_3)};\Delta_{k_1}u_1,\Delta_{k_2}u_2,\Delta_{k_3}u_3\right)\right|. \tag{5.5.28}$$

记$N_i=2^{k_i}$. 由对称性可以假设$N_1\geqslant N_2\geqslant N_3$. 进一步可以假设$N_1\sim N_2\gtrsim N$. 分两种情况讨论.

情形1. $N_3\ll N$.

此时$m_3(N_3)=1$, 从而得

$$\begin{aligned}(5.5.30)\lesssim&\sum_{k_i\geqslant 0}\left|\Lambda_3\left(\frac{N^sN^s}{N_1^{1+s}N_1^{1+s}};\Delta_{k_1}u_1,\Delta_{k_2}u_2,\Delta_{k_3}u_3\right)\right|\\ \lesssim&\sum_{k_i\geqslant 0}\left|\Lambda_3\left(N_1^{-1/4}N_2^{-1/4};\Delta_{k_1}u_1,\Delta_{k_2}u_2,\Delta_{k_3}u_3\right)\right|.\end{aligned}$$

所以在这一情形只需证

$$\sum_{k_i\geqslant 0}\int_{\xi_1+\xi_2+\xi_3=0,|\xi_i|\sim N_i}N_1^{-1/2}\prod_{i=1}^{3}\eta_{k_i}(\xi_i)\widehat{u_i}(\xi_i)\lesssim\prod_{i=1}^{3}\|u_i\|_{L^2}.$$

定义$v_i(x)$, 它的Fourier变换如下:

$$\widehat{v_i}(\xi)=N_i^{-1/6}\widehat{u_i}(\xi)\chi_{\{|\xi|\sim N_i\}}(\xi).$$

由Sobolev嵌入定理可知$\|v_i\|_{L^3}\lesssim\|u_i\|_{L^2}$, 从而应用Hölder不等式可得

$$\begin{aligned}&\sum_{k_i\geqslant 0}\int_{\xi_1+\xi_2+\xi_3=0,|\xi_i|\sim N_i}N_1^{-1/2}\prod_{i=1}^{3}\eta_{k_i}(\xi_i)\widehat{u_i}(\xi_i)\\ \lesssim&\sum_{k_i\geqslant 0}N_1^{-1/6}N_3^{1/6}\prod_{i=1}^{3}\|v_i\|_{L^3}\lesssim\prod_{i=1}^{3}\|u_i\|_{L^2}.\end{aligned}$$

从而在这一情形命题得证.

情形2. $N_3 \gtrsim N$. 此时显然有

$$(5.5.30) \lesssim \sum_{k_i \geqslant 0} \left| \Lambda_3 \left(\frac{N_3^{-3/4} N^{-3/4}}{N_1^{1/2}}; P_{k_1}u_1, P_{k_2}u_2, P_{k_3}u_3 \right) \right| \lesssim \prod_{i=1}^{3} \|u_i\|_{L^2}.$$

从而(5.5.25)得证.

接下来证(5.5.26). 只要证

$$\left| \Lambda_4 \left(\frac{\sigma_4}{m(\xi_1)m(\xi_2)m(\xi_3)m(\xi_4)}; u_1, u_2, u_3, u_4 \right) \right| \lesssim \prod_{i=1}^{4} \|u_j\|_2. \tag{5.5.29}$$

做频率二进制分解, 可得(5.5.29)式的左边小于等于

$$\sum_{k_i \geqslant 0} \left| \Lambda_4 \left(\frac{\sigma_4}{m(\xi_1)m(\xi_2)m(\xi_3)m(\xi_4)}; \Delta_{k_1}u_1, \Delta_{k_2}u_2, \Delta_{k_3}u_3, \Delta_{k_4}u_4 \right) \right|. \tag{5.5.30}$$

记$N_i = 2^{k_i}$. 由对称性可以假设$N_1 \geqslant N_2 \geqslant N_3 \geqslant N_4$. 进一步可以假设$N_1 \sim N_2 \gtrsim N$. 在积分区域有

$$\left| \frac{\sigma_4}{m(\xi_1)m(\xi_2)m(\xi_3)m(\xi_4)} \right| \lesssim \frac{1}{\prod_{i=1}^4 (N+N_i)m(N_i)} \lesssim \frac{N^{-3}}{\prod_{i=1}^4 N_i^{1/4}}.$$

利用Hölder不等式可得

$$\begin{aligned}(5.5.30) &\lesssim \sum_{k_i \geqslant 0} \frac{N^{-3}}{\prod_{i=1}^4 N_i^{1/4}} \|\Delta_{k_1}u_1\|_{L^2} \|\Delta_{k_2}u_2\|_{L^2} \|\Delta_{k_3}u_3\|_{L^\infty} \|\Delta_{k_4}u_4\|_{L^\infty} \\ &\lesssim \prod_{i=1}^{4} \|u_j\|_2.\end{aligned}$$

所以命题得证. □

现在可以把上一节得到的局部解延拓到整体. 首先需要一个变形的局部适定性结果, 它的证明与上节中的证明类似从而略去, 直观上可以这样理解: 当$N=1$时对应$s=-3/4$的局部适定性, 当$N=\infty$时对应$s=0$的局部适定性, 从而可以想象KdV方程在$1 \leqslant N < \infty$时有一致的局部适定性.

命题5.5.9. 设$-3/4 \leqslant s \leqslant 0$. 假设$\phi$满足$\|I\phi\|_{L^2(\mathbb{R})} \leqslant 2\epsilon_0 \ll 1$. 则在$[-1,1]$方程(5.3.1)存在唯一的解使得

$$\|Iu\|_{\bar{F}^0(1)} \leqslant C\epsilon_0, \tag{5.5.31}$$

其中常数C与N无关.

对任意给定的$u_0\in H^{-3/4}$和时间$T>0$, 我们的目的是要构造$[0,T]$的解. 若u是KdV方程的解且初值为u_0, 则对任意$\lambda>0$, $u_\lambda(x,t)=\lambda^{-2}u(x/\lambda,t/\lambda^3)$也是KdV方程的解且初值为$u_{0,\lambda}=\lambda^{-2}u_0(x/\lambda)$. 通过简单的计算知

$$\|Iu_{0,\lambda}\|_{L^2}\lesssim\lambda^{-\frac{3}{2}-s}N^{-s}\|u_0\|_{H^s}.$$

对于固定的N(N待定), 我们选取$\lambda\sim N^{-\frac{2s}{3+2s}}$使得

$$\lambda^{-\frac{3}{2}-s}N^{-s}\|\phi\|_{H^s}=\epsilon_0<1.$$

为符号简单起见, 我们仍记u_λ为u, $u_{0,\lambda}$为u_0, 并且假设$\|Iu_0\|_{L^2}\leqslant\epsilon_0$, 目标是构造$[0,\lambda^3T]$的解. 根据命题5.5.9可知存在$[0,1]$的解, 只要去控制修正能量$E_I^2(t)=\|Iu\|_{L^2}^2$即可.

首先来看$E_I^2(t)$在$t\in[0,1]$的控制, 我们将证明$E_I^2(t)<4\epsilon_0^2$. 由连续性方法不妨假设$E_I^2(t)<5\epsilon_0^2$, 根据命题5.5.8可得

$$E_I^4(0)=E_I^2(0)+O(\epsilon_0^3)$$

以及

$$E_I^4(t)=E_I^2(t)+O(\epsilon_0^3).$$

由命题5.5.7得对$t\in[0,1]$有

$$E_I^4(t)\leqslant E_I^4(0)+C\epsilon_0^5N^{-15/4}.$$

所以

$$\begin{aligned}\|Iu(1)\|_{L^2}^2=E_I^4(1)+O(\epsilon_0^3)\leqslant&E_I^4(0)+C\epsilon_0^5N^{-15/4}+O(\epsilon_0^3)\\=&\epsilon_0^2+C\epsilon_0^5N^{-15/4}+O(\epsilon_0^3)<4\epsilon_0^2.\end{aligned}$$

因此解u延拓一步, 从而可以延拓到$t\in[0,2]$. 这样延拓M步, 可以得到对$t\in[0,M+1]$有

$$E_I^4(t)\leqslant E_I^4(0)+CM\epsilon_0^5N^{-15/4}.$$

只要$MN^{-15/4}\lesssim 1$, 因此有

$$E_I^2(M)=E_I^4(t)+O(\epsilon_0^3)=\epsilon_0^2+O(\epsilon_0^3)+CM\epsilon_0^5N^{-15/4}<4\epsilon_0^2,$$

从而可以将解延拓到$t\in[0,N^{15/4}]$. 由于选取$N(T)$充分大, 使得

$$N^{15/4}>\lambda^3T\sim N^3T.$$

从而解u延拓到了$[0,\lambda^3T]$, 再做尺度变换即可.

在本节的最后, 来看看得到的整体解有什么样的性质. 根据尺度变换可以得到

$$\sup_{t\in[0,T]}\|u(t)\|_{H^s}\sim\lambda^{3/2+s}\sup_{t\in[0,\lambda^3T]}\|u_\lambda(t)\|_{H^s}\leqslant\lambda^{3/2+s}\sup_{t\in[0,\lambda^3T]}\|Iu_\lambda(t)\|_{L^2},$$
$$\|I\phi_\lambda\|_{L^2}\lesssim N^{-s}\|\phi_\lambda\|_{H^s}\sim N^{-s}\lambda^{-3/2-s}\|\phi\|_{H^s}.$$

根据前面的讨论可知

$$\sup_{t\in[0,\lambda^3T]}\|Iu_\lambda(t)\|_{L^2}\lesssim\|I\phi_\lambda\|_{L^2},$$

从而知

$$\sup_{t\in[0,T]}\|u(t)\|_{H^s}\lesssim N^{-s}\|\phi\|_{H^s}.$$

选择λ使得$\|I\phi_\lambda\|_{L^2}\sim\epsilon_0\ll 1$, 可知

$$\lambda=\lambda(N,\epsilon_0,\|\phi\|_{H^s})\sim\left(\frac{\|\phi\|_{H^s}}{\epsilon_0}\right)^{\frac{2}{3+2s}}N^{-\frac{2s}{3+2s}}.$$

选取N使得$N^{\frac{15}{4}}>\lambda^3T\sim_{c\|\phi\|_{H^s},\epsilon_0}N^{-\frac{6s}{3+2s}}T$, 可知$N\sim T^{4/3}$. 所以可知得到的整体解$u(x,t)$满足

$$\|u(t)\|_{H^{-3/4}}\lesssim(1+|t|)\|\phi\|_{H^{-3/4}}.$$

对于$s\in(-3/4,0]$的情形, 我们留给读者去证明.

§5.6 带导数非线性项Schrödinger方程

在前面几节, 我们证明了与KdV方程相关的Bourgain空间中的双线性估计并由此得到了局部适定性. 然而有些情形例如KdV方程在$s=-3/4$时, 直接使用Bourgain空间并不能得到局部适定性, 从而要求我们再结合别的技巧. 为使读者进一步理解这一方法, 本节我们研究带导数非线性项的Schrödinger方程的Cauchy问题

$$\begin{cases}iu_t+u_{xx}=i\lambda(|u|^2u)_x,\ (x,t)\in\mathbb{R}^2\\u(x,0)=u_0(x).\end{cases}\tag{5.6.1}$$

根据第5.1节的讨论, 可知方程(5.6.1)对应的色散关系为$\phi(\xi)=-\xi^2$, 从而在本节中我们限制Bourgain空间$X^{s,b}$是与导数Schrödinger方程相关的, 即由如下范数给出:

$$\|u\|_{X^{s,b}}=\|\langle\xi\rangle^2\langle\tau+\xi^2\rangle^b\widehat{u}(\xi,\tau)\|_{L^2}.$$

根据标准的方法, 我们知核心任务归结为证明如下的三线性估计

$$\|\partial_x(u\bar{v}w)\|_{X^{s,b-1}}\lesssim\|u\|_{X^{s,b}}\|v\|_{X^{s,b}}\|w\|_{X^{s,b}}. \tag{5.6.2}$$

但是这一个不等式对任意的$s,b\in\mathbb{R}$都是不成立的, 可见[52]. 究其原因, 是由于方程(5.6.1)的色散效应不强, 无法控制高低频相互作用. 事实上, 在[52]中作者还证明了高低频作用产生的坏项只是对数的发散, 结合[66]光滑效应结构能够克服这一个困难.

在本节, 我们将采用gauge变换的办法, 可见[61, 128, 147], 这里的结果是由Takaoka[147]得到的. 为了把高低频相互作用消去或者减弱, 首先对方程做gauge变换

$$v(x,t)=\mathcal{G}_\lambda(u)(x,t)=e^{-i\lambda\int_{-\infty}^x|u(y,t)|^2dy}u(x,t), \tag{5.6.3}$$

这样容易验证v满足如下的方程

$$\begin{cases}i\partial_t v+\partial_x^2 v=-i\lambda v^2\partial_x\bar{v}-\frac{|\lambda|^2}{2}|v|^4v,\\ v(x,0)=v_0(x),\end{cases} \tag{5.6.4}$$

其中$v_0(x)=e^{-i\lambda\int_{-\infty}^x|u_0(y)|^2dy}u_0(x)$. 根据定义可知gauge变换是可逆的,

$$u(x,t)=e^{i\lambda\int_{-\infty}^x|v(y,t)|^2dy}v(x,t)=\mathcal{G}_{-\lambda}(v).$$

从而u和v是可以相互控制的, 所以问题转化为只需研究Cauchy问题(5.6.4).

首先注意到原方程的非线性项为$i\lambda(|u|^2u)_x=2i\lambda|u|^2u_x+i\lambda u^2\bar{u}_x$, 经过gauge变换之后, 把$|u|^2u_x$项消去, 换成了$|v|^4v$. 显然$|v|^4v$不含有导数从而可以直接用Strichartz估计来处理. 但是, 初看上去, 方程(5.6.4)还有一个含导数的非线性项$u^2\bar{u}_x$, 似乎gauge变换并没有把导数项完全消去. 但事实上$u^2\bar{u}_x$比$|u|^2u_x$好得多, 原因在于色散关系$\omega(\xi)=-\xi^2$是偶函数.

从Bourgain空间的定义可得

$$\|\bar{u}\|_{X^{s,b}}=\|\langle\xi\rangle^s\langle\tau-\xi^2\rangle^b\mathcal{F}u\|_{L^2_\xi L^2_\tau},\ \ \|u\|_{X^{s,b}}=\|\langle\xi\rangle^s\langle\tau+\xi^2\rangle^b\mathcal{F}u\|_{L^2_\xi L^2_\tau}.$$

对非线性项$u^2\bar{u}_x$, 我们可以证明当$s \geqslant 1/2$时对某个$b > 1/2$有

$$\|uv\bar{w}_x\|_{X_{s,b-1}} \lesssim \|u\|_{X_{s,b}}\|v\|_{X_{s,b}}\|w\|_{X_{s,b}}. \tag{5.6.5}$$

这与$|u|^2u_x$是不同的, 事实上这很容易看清楚. 考虑$uv\bar{w}_x$的高低频相互作用最坏的项$\Delta_0 u\Delta_0 v\Delta_k \bar{w}_x$, 读者可以参考第5.3节中关于特征函数双线性估计的证明得到相应的三线性估计的证明.

下面我们主要估计非线性项$v^2\partial_x\bar{v}$. 首先需要关于Schrödinger自由解的相关估计, 它们的证明与第5.2节中色散关系为$\omega(\xi) = -|\xi|\xi$时的证明是一样的, 证明省略.

引理5.6.1. *Schrödinger方程对应的群*$\{S(t) = \mathscr{F}_x^{-1}e^{it\xi^2}\mathscr{F}_x\}_{-\infty}^{+\infty}$*满足:*

$$\|S(t)v_0\|_{L_x^6L_t^6} \lesssim \|v_0\|_{L^2},$$
$$\|D^{1/2}S(t)v_0\|_{L_x^\infty L_t^2} \lesssim \|v_0\|_{L^2},$$
$$\|D^{-1/4}S(t)v_0\|_{L_x^4L_t^\infty} \lesssim \|v_0\|_{L^2}.$$

利用引理5.1.6结合上述引理立即可得

引理5.6.2. *设*$u \in X^{0,b}$*且*$1/2 < b < 1$, *则*

$$\|u\|_{L_x^6L_t^6} \lesssim \|u\|_{X^{0,b}},$$
$$\|D^{1/2}u\|_{L_x^\infty L_t^2} \lesssim \|u\|_{X^{0,b}},$$
$$\|D^{-1/4}u\|_{L_x^4L_t^\infty} \lesssim \|u\|_{X^{0,b}}.$$

利用这些引理, 我们现在来证明如下的三线性估计.

定理 5.6.3. *假设*$s \geqslant 1/2$, $1/2 < b < 2/3$, $b' > 1/2$, *那么有*

$$\|v_1v_2\partial_x\bar{v}_3\|_{X_{s,b-1}} \leqslant C\|v_1\|_{X_{s_1,b'}}\|v_2\|_{X_{s_2,b'}}\|v_3\|_{X_{s_3,b'}}. \tag{5.6.6}$$

证明. 利用Plancherel等式以及对偶可知, 只要证明: 如果$f_i \in L^2(\mathbb{R}^2)$非负, $i = 1,2,3,4$, 则

$$\int_{\Gamma_4} \frac{\langle\xi_4\rangle^s\langle\tau_4 - \xi_4^2\rangle^{b-1}\xi_3\prod_{i=1}^4 f_i(\xi_i,\tau_i)}{\langle\tau_1+\xi_1^2\rangle^{b'}\langle\tau_2+\xi_2^2\rangle^{b'}\langle\tau_3-\xi_3^2\rangle^{b'}\prod_{i=1}^3\langle\xi_i\rangle^s} \lesssim \prod_{i=1}^4\|f_i\|_{L^2}, \tag{5.6.7}$$

其中Γ_4是超平面

$$\Gamma_4 = \{(\xi,\tau) \in \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 : \xi_1+\xi_2+\xi_3+\xi_4 = 0, \tau_1+\tau_2+\tau_3+\tau_4 = 0\}$$

且赋予诱导的测度: $\theta_i = (\xi_i, \tau_i)$

$$\int_{\Gamma_4} h(\theta_1,\theta_2,\theta_3,\theta_4) = \int_{\mathbb{R}^6} h(\theta_1,\theta_2,\theta_3,-\theta_1-\theta_2-\theta_3)d\theta_1 d\theta_2 d\theta_3.$$

由Plancherel等式易知

$$\int_{\Gamma_4}\prod_{i=1}^{4} f_i(\xi_i,\tau_i) = \int_{\mathbb{R}^2}\prod_{i=1}^{4}\mathscr{F}^{-1}(f_i)(x,t)dxdt. \tag{5.6.8}$$

由对称性不妨假设积分区域限制在$|\xi_1| \leqslant |\xi_2|$. 引入记号$|\xi|_{max}$, $|\xi|_{sub}$, $|\xi|_{thd}$, $|\xi|_{min}$分别表示$|\xi_1|$, $|\xi_2|$, $|\xi_3|$, $|\xi_4|$中的最大的, 第二大, 第三大, 以及最小的数. 且记$\sigma_i^{\pm} = \tau_i \pm \xi_i^2$, $i = 1,2,3,4$, 以及

$$F_i = \mathscr{F}^{-1}\left(\frac{f_i}{\langle\tau+\xi^2\rangle^{b'}}\right), i=1,2;\ F_k = \mathscr{F}^{-1}\left(\frac{f_k}{\langle\tau-\xi^2\rangle^{b'}}\right), k=3,4.$$

进一步将积分区域按频率相互作用分成如下情形逐个讨论, 这里采用的是[52]中的方法.

情形1. $\max(|\xi_1|,|\xi_2|,|\xi_3|,|\xi_4|) \leqslant 10$. 此时由(5.6.8)立即可得(5.6.7)的左边式子小于等于

$$\int_{\Gamma_4}\frac{\prod_{i=1}^4 f_i(\xi_i,\tau_i)}{\langle\tau_1+\xi_1^2\rangle^{b'}\langle\tau_2+\xi_2^2\rangle^{b'}\langle\tau_3-\xi_3^2\rangle^{b'}} \lesssim \|f_4\|_2\prod_{i=1}^{3}\|F_i\|_{L^6} \lesssim \prod_{i=1}^{4}\|f_i\|_{L^2}.$$

情形2. $|\xi|_{max} \gg 1$且$|\xi|_{thd} \ll |\xi|_{sub}$. 此时由$\xi_1+\xi_2+\xi_3+\xi_4=0$得$|\xi|_{max} \sim |\xi|_{sub}$. 再分以下几个子情形讨论.

情形2a. $|\xi_2| \ll |\xi_3| \sim |\xi_4|$. 这一情形对应高低频相互作用. 首先注意到在超平面上有

$$h(\xi_1,\xi_2,\xi_3,\xi_4) = \sigma_1^+ + \sigma_2^+ + \sigma_3^- + \sigma_4^- = 2(\xi_1+\xi_3)(\xi_2+\xi_3).$$

从而在这一情形有

$$\max(|\sigma_1^+|,|\sigma_2^+|,|\sigma_3^-|,|\sigma_4^-|) \gtrsim |\xi_3|^2.$$

如果$|\sigma_4^-|$最大, 则只要满足$b \leqslant 3/4$且$s \geqslant 1/4$, 由(5.6.8)式和Hölder不等式可得(5.6.7)的左边式子小于等于

$$\int_{\Gamma_4}\frac{|\xi_3||\xi_3|^{2(b-1)}\prod_{i=1}^4 f_i(\xi_i,\tau_i)}{\prod_{i=1}^2\langle\xi_i\rangle^s\langle\tau_1+\xi_1^2\rangle^{b'}\langle\tau_2+\xi_2^2\rangle^{b'}\langle\tau_3-\xi_3^2\rangle^{b'}}$$

$$\lesssim \|J^{-s}F_1\|_{L_x^4L_t^\infty}\|J^{-s}F_2\|_{L_x^4L_t^\infty}\|f_4\|_{L_{x,t}^2}\|\Lambda^{2b-1}F_3\|_{L_x^\infty L_t^2}\lesssim\prod_{i=1}^4\|f_i\|_{L^2}.$$

如果$|\sigma_3^-|$最大, 则由$\langle\sigma_4^-\rangle^{1-b}\langle\sigma_3^-\rangle^{b'}\lesssim\langle\sigma_4^-\rangle^{b'}\langle\sigma_3^-\rangle^{1-b}$ 知与$|\sigma_4^-|$最大这一情形类似可得. 如果$|\sigma_2^+|$最大, 则由$\langle\sigma_4^-\rangle^{1-b}\langle\sigma_2^+\rangle^{b'}\lesssim\langle\sigma_4^-\rangle^{b'}\langle\sigma_2^+\rangle^{1-b}$知只要满足$b\leqslant 5/8$且$s\geqslant 1/4$则(5.6.7)的左边式子小于等于

$$\int_{\Gamma_4}\frac{|\xi_3||\xi_3|^{2(b-1)}\prod_{i=1}^4 f_i(\xi_i,\tau_i)}{\prod_{i=1}^2\langle\xi_i\rangle^s\langle\tau_1+\xi_1^2\rangle^{b'}\langle\tau_3-\xi_3^2\rangle^{b'}\langle\tau_4-\xi_4^2\rangle^{b'}}$$
$$\lesssim\|J^{-s}F_1\|_{L_x^4L_t^\infty}\|F_4\|_{L_x^4L_t^\infty}\|f_2\|_{L_{x,t}^2}\|\Lambda^{2b-1}F_3\|_{L_x^\infty L_t^2}\lesssim\prod_{i=1}^4\|f_i\|_{L^2}.$$

如果$|\sigma_1^+|$最大, 由对称性这与$|\sigma_2^+|$最大的情形是一样的.

情形2b. $|\xi_2|\sim|\xi_3|\sim|\xi|_{max}$或$|\xi_2|\sim|\xi_4|\sim|\xi|_{max}$. 不妨假设$|\xi_2|\sim|\xi_3|\sim|\xi|_{max}$. 由$h$表达式, 我们继续分情形讨论. 如果$|\xi_2+\xi_3|\leqslant 1$, 则$\langle\xi_1\rangle\sim\langle\xi_4\rangle$. 从而当$s\geqslant 1/2$时可得(5.6.7)的左边式子小于等于

$$\int_{\Gamma_4}\frac{\prod_{i=1}^4 f_i(\xi_i,\tau_i)}{\langle\tau_1+\xi_1^2\rangle^{b'}\langle\tau_2+\xi_2^2\rangle^{b'}\langle\tau_3-\xi_3^2\rangle^{b'}}\lesssim\prod_{i=1}^4\|f_i\|_{L^2}.$$

如果$|\xi_2+\xi_3|\geqslant 1$, 则此时有$\max(|\sigma_1^+|,|\sigma_2^+|,|\sigma_3^-|,|\sigma_4^-|)\gtrsim|\xi_3|$. 类似情形2a的讨论可得.

情形2c. $|\xi_1|\sim|\xi_3|\sim|\xi|_{max}$或$|\xi_1|\sim|\xi_4|\sim|\xi|_{max}$. 由对称性这与情形2b是一样的.

情形2d. $|\xi_1|\sim|\xi_2|\sim|\xi|_{max}$. 此时有$\max(|\sigma_1^+|,|\sigma_2^+|,|\sigma_3^-|,|\sigma_4^-|)\gtrsim|\xi_3|^2$, 类似情形2a的讨论可得.

情形3. $|\xi|_{min}\ll|\xi|_{thd}\sim|\xi|_{sub}\sim|\xi|_{max}$. 易知此时有

$$\max(|\sigma_1^+|,|\sigma_2^+|,|\sigma_3^-|,|\sigma_4^-|)\gtrsim|\xi_3|^2,$$

从而类似情形2a的讨论可得.

情形4. $|\xi|_{min}\sim|\xi|_{thd}\sim|\xi|_{sub}\sim|\xi|_{max}$, 类似情形1得到.

从而定理得证. □

在上述定理的证明, 我们并没有像定理5.3.1的证明中那样利用二进制分解, 然后化为一些特征函数的估计以及二进求和, 但是基本的想法是一样的. 读者不妨自己给出这样的证明, 或者参考文献[52].

接下来处理另外一个非线性项$|u|^4u$, 根据标准方法知我们需要去做如下类型的五线性估计

$$\|u_1u_2u_3\bar{u}_4\bar{u}_5\|_{X^{s,b-1}}\lesssim\prod_{i=1}^{5}\|u_i\|_{X^{s,b}}. \tag{5.6.9}$$

考虑到非线性$u^2\bar{u}_x$要求$s\geqslant 1/2$, 因此我们不去追究(5.6.9)的最佳估计, 而仅仅满足于$s\geqslant 1/2$, 作者相信使得(5.6.9)成立的最佳条件是$s\geqslant 0$.

引理5.6.4. *假设$s\in\mathbb{R}$, $1/2<b\leqslant 1$, 则*

$$\|\psi(t/T)u\|_{X^{s,b-1}}\lesssim\|u\|_{L_T^{2/(3-2b)}H_x^s}.$$

证明. 不妨假设$s=0$. 根据$X^{s,b}$的等价定义以及利用嵌入定理$L_t^{2/(3-2b)}\hookrightarrow H_t^{b-1}$和Minkowski不等式可得

$$\begin{aligned}\|\psi(t/T)u\|_{X^{0,b-1}}=&\big\|\|e^{-it\omega(\xi)}\psi(t/T)(\mathscr{F}_xu)(\xi,t)\|_{H_t^{b-1}}\big\|_{L_\xi^2}\\ \lesssim&\big\|\|e^{-it\omega(\xi)}\psi(t/T)(\mathscr{F}_xu)(\xi,t)\|_{L_t^{2/(3-2b)}}\big\|_{L_\xi^2}\lesssim\|u\|_{L_T^{2/(3-2b)}L_x^2},\end{aligned}$$

从而引理得证. □

定理 5.6.5. *设$s\geqslant 1/2$, $1/2<b\leqslant 1$, 则存在$\theta>0$使得*

$$\|\psi(t/T)u_1u_2u_3\bar{u}_4\bar{u}_5\|_{X^{s,b-1}}\lesssim T^{\theta}\prod_{i=1}^{5}\|u_i\|_{X^{s,b}}. \tag{5.6.10}$$

证明. 我们在证明中假设$u_1=\cdots=u_5=u$, 它很容易推广到一般情形. 只要证明

$$\|\psi(t/T)|u|^4u\|_{X^{s,b-1}}\lesssim T^{\theta}\|u\|_{X^{s,b}}^5. \tag{5.6.11}$$

由引理5.6.4, 引理5.6.2以及分数次Leibniz法则可得

$$\begin{aligned}\|\psi(t/T)|u|^4u\|_{X^{s,b-1}}\lesssim&\||u|^4u\|_{L_T^{2/(3-2b)}H_x^s}\lesssim\|u^4\|_{L_T^\infty L_x^2}\|u\|_{L_T^{2/(3-2b)}H_\infty^s}\\ \lesssim&T^{\theta}\|u\|_{L_T^\infty L_x^8}^4\|u\|_{L_T^4H_\infty^s}\lesssim T^{\theta}\|u\|_{X^{s,b}}^5,\end{aligned}$$

从而定理得证. □

利用第5.3节中定理5.3.5的证明论述, 我们立即得

命题5.6.6. 设$1/2 \leqslant s < 1$. 对任何$v_0 \in H^s$, 则存在$b > 1/2$, $T = T(\|v_0\|_{H^{1/2}}) > 0$以及Cauchy问题(5.6.4)的唯一解满足$v \in X_T^{s,b}$.

对于原始的方程(5.6.1), 我们有

定理 5.6.7. 假设$\lambda \in \mathbb{R}$, $s \geqslant 1/2$. 对任意$u_0 \in H^s(\mathbb{R})$, 都存在$b > 1/2$, $T = T(\|u_0\|_{H^{1/2}}) > 0$以及Cauchy问题(5.6.1)在$[-T, T]$ 的唯一解u满足

$$u \in C([-T,T] : H^s(\mathbb{R})), \quad \mathcal{G}_\lambda(u) \in X_T^{s,b}.$$

且映射$u_0 \to u$是局部Lipschitz连续的.

证明. 对$u_0 \in H^s$, $1/2 \leqslant s < 1$, 我们定义$v_0 \in H^s$如下

$$v_0(x) = e^{-i\lambda/2\int_{-\infty}^x |u_0(y)|^2 dy} u_0(x).$$

假设$v_0^{(n)}$是H^∞中的一串序列且在H^s范数下$v_0^{(n)} \to v_0$. 假设v_n是由命题5.6.6得到的方程(5.6.4) 的解, 我们定义

$$\begin{aligned} u_n(x,t) =& \mathcal{G}_{-\lambda}(v_n)(x,t), \\ u_0^{(n)}(x) =& e^{i\lambda/2\int_{-\infty}^x |v_0^{(n)}(y)|^2 dy} v_0^{(n)}(x). \end{aligned}$$

由定义显然有

$$\|u_n\|_{L_T^\infty L_x^2} = \|v_n\|_{L_T^\infty L_x^2}.$$

利用分数次Leibniz法则以及Sovolev嵌入定理可得对$1/2 \leqslant s < 1$有

$$\begin{aligned} \|D^s u_n\|_{L_T^\infty L_x^2} \lesssim& \|D^s v_n\|_{L_T^\infty L_x^2} + \left\| D^s \left(e^{i\lambda/2\int_{-\infty}^x |v_0^{(n)}(y)|^2 dy} \right) v_n \right\|_{L_T^\infty L_x^2} \\ \lesssim& \|D^s v_n\|_{L_T^\infty L_x^2} + \left\| D^s \left(e^{i\lambda/2\int_{-\infty}^x |v_0^{(n)}(y)|^2 dy} \right) \right\|_{L_T^\infty L_x^p} \|v_n\|_{L_T^\infty L_x^q} \\ \lesssim& \|D^s v_n\|_{L_T^\infty L_x^2} + \|v_n\|^2_{L_T^\infty L_x^{2p_1}} \|v_n\|_{L_T^\infty H_x^{1/2}} \\ \lesssim& (1 + \|v_n\|^2_{L_T^\infty H_x^s}) \|v_n\|_{L_T^\infty H_x^s} \end{aligned}$$

其中$2 < p < \infty$, $1/p + 1/q = 1/2$, 以及$1/p_1 = 1/p + 1 - s$. 用同样的方法可得

$$\|u_n - u_m\|_{L_T^\infty H_x^s} \lesssim (1 + \|v_n\|_{L_T^\infty H_x^s} + \|v_m\|_{L_T^\infty H_x^s})^2 \|v_n - v_m\|_{L_T^\infty H_x^s}.$$

事实上我们只需证明对任意的$2 \leqslant p < \infty$有$\mathcal{G}_\lambda$是$H^s \to L^p$的Lipschitz连续的映射. 由于

$$\left\| e^{i\lambda/2\int_{-\infty}^x |f(y)|^2 dy} f(x) - e^{i\lambda/2\int_{-\infty}^x |g(y)|^2 dy} g(x) \right\|_{L^p}$$

$$\lesssim \|f-g\|_{H^s} + \left\| e^{i\lambda/2\int_{-\infty}^x |f(y)|^2dy} - e^{i\lambda/2\int_{-\infty}^x |g(y)|^2dy} \right\|_{L^\infty} (\|f\|_{H^s} + \|g\|_{H^s}).$$

利用$|f(x)-f(y)| \leqslant \|f'\|_{L^1}$, 从而得

$$\begin{aligned} & \left\| e^{i\lambda/2\int_{-\infty}^x |f(y)|^2dy} - e^{i\lambda/2\int_{-\infty}^x |g(y)|^2dy} \right\|_{L^\infty} \\ \lesssim & \left\| e^{i\lambda/2\int_{-\infty}^x (|f(y)|^2-|g(y)|^2)dy} - 1 \right\|_{L^\infty} \\ \lesssim & \||f|^2-|g|^2\|_{L^1} \lesssim \|f-g\|_{H^s}(\|f\|_{H^s}+\|g\|_{H^s}). \end{aligned}$$

令$n\to\infty$, 我们得到方程(5.6.1)的解u. 从而定理得证. □

§5.7 其它色散方程

除了KdV方程和Schrödinger方程这两个经典的色散方程外, 还有其它的一些重要的色散方程, 近年来被很多数学家关注. 所以在这一节中我们再介绍一些其它的色散方程. 本节首先给出作者的一些体会, 以便读者能更好地掌握如何利用Bourgian 空间的方法来研究色散方程解的局部适定性. 从上面关于KdV方程的双线性估计和带导数非线性项的Schrödinger方程的三线性估计可以看出, 我们既可以利用Tao的$[k;Z]$乘子[151]的想法来证明, 也可以利用方程的局部光滑效应和最大函数估计的方法来证明[147]. 两种方法各有千秋, 需要读者仔细体会. 我们以KdV方程的双线性估计为例给予阐述. 我们利用Tao的$[k;Z]$乘子方法可以得到定理5.3.1的证明即

$$\|\partial_x(u_1u_2)\|_{X^{s,b-1}} \leqslant C\|u_1\|_{X^{s,b'}}\|u_2\|_{X^{s,b'}},\ \ s>-3/4, b, b'>1/2 \tag{5.7.1}$$

如果只利用KdV方程的基本的空时估计：Strichartz估计,局部光滑效应, 最大函数估计的方法可得上式在$s>-5/8$成立,可参看[79]. 当$-5/8\geqslant s>-3/4$时, Kenig, Ponce, Vega [81]利用如下初等的微分不等式证明上了(5.7.1).

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(1+|x-\alpha|)^{2b}(1+|x-\beta|)^{2b}} \leqslant \frac{C}{(1+|\alpha-\beta|)^{2b}},\ b>\frac{1}{2} \tag{5.7.2}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(1+|x|)^{2b}\sqrt{a-x}} \leqslant \frac{C}{(1+|a|)^{\frac{1}{2}}},\ b>\frac{1}{2} \tag{5.7.3}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(1+|x-\alpha|)^{2(1-b)}(1+|x-\beta|)^{2b}} \leqslant \frac{C}{(1+|\alpha-\beta|)^{2(1-b)}},\ b>\frac{1}{2} \tag{5.7.4}$$

$$\int_{|x|\leqslant\beta} \frac{dx}{(1+|x|)^{2(1-b)}\sqrt{a-x}} \leqslant \frac{C(1+\beta)^{2(b-\frac{1}{2})}}{(1+|a|)^{\frac{1}{2}}},\ b>\frac{1}{2}. \tag{5.7.5}$$

作者发现如果像本章第三节那样首先定义$\xi = \xi_1 + \xi_2$, $\tau = \tau_1 + \tau_2$ $\sigma = \tau - \xi^3$, $\sigma_1 = \tau_1 - \xi_1^3$, $\sigma_2 = \tau_2 - \xi_2^3$. 如果对超平面$\{(\xi, \xi_1, \xi_2) \times (\tau, \tau_1, \tau_2) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 : \xi = \xi_1 + \xi_2, \tau = \tau_1 + \tau_2\}$ 进行适当的分区. 那么在$|\xi_1| \sim |\xi_2| \gg |\xi|$, $|\sigma| \geqslant |\sigma_1|, |\sigma_2|$的情形下, 我们只利用不等式(5.7.2), 对其他情形如同文章[79]我们利用Strichartz估计,局部光滑效应, 最大函数估计仍然可以得到(5.7.1), 这样可以简化了文章[81]中的证明, 有兴趣的读者可以证明. 从中我们也可以看出在负正则性的问题中高×高→低的相互作用的情形是比较坏的, 所以在本章第四节重点考虑高×高→低的情形. 这样对相函数复杂的色散方程, 如果计算L^2双线性估计([$k; Z$]乘子方法的基本估计)困难的话(Tao在文章[151]中只计算了KdV方程(对应本书的引理5.3.2), Schrödinger方程和波方程的L^2双线性估计), 利用上述方法得到的一些色散方程的低正则性结果和利用[$k; Z$]乘子方法得到的结果一样. 有兴趣的读者可以试着比较一些. 此外对应着不等式(5.7.2), 还有一个类似的不等式, 在研究色散方程解的局部适定性也起着重要的作用.

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{dx}{\langle x - \alpha \rangle^{2b} \langle x - \beta \rangle^{2b}} \leqslant \frac{C}{\langle \alpha - \beta \rangle^{4b-1}}, \ \frac{1}{4} < b < \frac{1}{2}. \tag{5.7.6}$$

下面, 我们以相函数复杂的色散方程：四阶非线性Schrödinger 方程为例阐述一下如何解决相函数有非零奇异点的方程解的局部适定性. (KdV方程的相函数$\phi(\xi) = \xi^3$和Schrödinger方程的相函数$\phi(\xi) = |\xi|^2$没有非零奇异点, 即相函数本身及其一阶, 二阶导数为零的解只有零解.) 关于涡旋丝的四阶非线性Schrödinger 方程如下:

$$i\partial_t u + \partial_x^2 u + \nu \partial_x^4 u = F(u, \bar{u}, \partial_x u, \partial_x \bar{u}, \partial_x^2 u, \partial_x^2 \bar{u}), \quad (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \tag{5.7.7}$$

其中ν 是实数且$\nu \neq 0$, 非线性项F 被如下给出

$$\begin{aligned} &F(u, \bar{u}, \partial_x u, \partial_x \bar{u}, \partial_x^2 u, \partial_x^2 \bar{u}) \\ &= -\frac{1}{2}|u|^2 u + \lambda_1 |u|^4 u + \lambda_2 (\partial_x u)^2 \bar{u} + \lambda_3 |\partial_x u|^2 u + \lambda_4 u^2 \partial_x^2 \bar{u} + \lambda_5 |u|^2 \partial_x^2 u, \end{aligned}$$

其中$\lambda_1 = -\frac{3\mu}{4}$, $\lambda_2 = -2\mu + \frac{\nu}{2}$, $\lambda_3 = -4\mu - \nu$, $\lambda_5 = -2\mu + \nu$ 且μ 是实数. 此方程来源于嵌入在一个无限区域上充满非粘滞性的不可压缩流中的涡旋丝的三维运动. 需要注意的是此方程的相函数$\phi(\xi) = \nu\xi^4 - \xi^2$ 有非零奇异点. 这样我们不能直接利用本章第二节的方法得到此方程的局部光滑效应和最大函数估计. 因此, 我们需要利用Fourier 限制算子

$$P^N f = \int_{|\xi| \geqslant N} e^{ix\xi} \hat{f}(\xi) d\xi, \quad P_N f = \int_{|\xi| \leqslant N} e^{ix\xi} \hat{f}(\xi) d\xi, \ \forall N > 0, \tag{5.7.8}$$

来分离相函数的奇异性. 这样我们利用Fourier 限制算子和本章第二节的方法可以得到如下

$$\|D_x^{\frac{3}{2}}P^{2a}S(t)\varphi\|_{L_x^\infty L_t^2}\leqslant C\|\varphi\|_{L^2} \tag{5.7.9}$$

$$\|D_x^{-\frac{1}{4}}P^{a}S(t)\varphi\|_{L_x^4 L_t^\infty}\leqslant C\|\varphi\|_{L^2}, \tag{5.7.10}$$

$$\Big(\int_{-\infty}^{\infty}\sup_{[-T,T]}|P^aS(t)u_0|^2dx\Big)^{1/2}\leqslant C_{T,s}\|u_0\|_{H^s},\ s>1 \tag{5.7.11}$$

这里a是与ν有关的常数. 这样利用(5.7.9),(5.7.10), (5.7.11)和Strichartz估计, 由Bourgain空间的方法得到方程(5.7.7)的Cauchy问题解的局部适定性. 感兴趣的读者可以参见作者的文献[63, 64].

另外对于有些问题我们不能直接利用Bourgain空间$X^{s,b}$来构造压缩映射的方法来得到, 从而需要有新的方法, 我们在这里不详细地介绍这些方法, 感兴趣的读者可以查阅相关的文献, 例如在Guo的博士论文[54]中对此做了系统的研究和介绍. 例如与导数Schrödinger方程非常相近的是(广义) Benjamin-Ono (BO) 方程:

$$\partial_t u+\mathcal{H}\partial_{xx}u=\mu\partial_x(u^k),\quad u(x,0)=u_0(x). \tag{5.7.12}$$

其中$k\in\mathbb{Z}$, $\mu\in\mathbb{R}$, 以及$\mathcal{H}$是Hilbert变换$\mathcal{H}(f)(x)=\frac{1}{\pi}p.v.\int_{\mathbb{R}}\frac{f(y)}{x-y}dy$. 由于$\widehat{\mathcal{H}f}=-i\mathrm{sgn}(\xi)\widehat{f}(\xi)$, 从而BO方程对应的色散关系为$\omega(\xi)=-|\xi|\xi$. 这个方程是由Benjamin [8] 和Ono [127]在关于狭长槽中深水波运动研究中建立的模型. 与Schrödinger方程不同的是, 当u_0为实值时方程(5.7.12)的解u也是实值的, 实值和复值的BO方程是有本质的区别的.

和KdV方程相比, BO方程的色散效应更弱. 当$k=2$时, 直接的压缩映射对BO方程(5.7.12)不能适用, 但在弱一些的适定性的意义下(例如只要求解映射是连续的), 对实值的BO方程仍然可以得到适定性结果, 目前最好的结果是Kenig, Ionescu[66]证明了实值的BO方程的L^2整体适定性, 他们的方法是基于gauge变换以及$X^{s,b}$结构. 当$k=3$时, 目前最好的结果是Kenig, Takaoka[87]通过做频率二进局部化的gauge变换证明了实值的Cauchy问题在$H^{1/2}$的整体适定性并且证明$s=1/2$在如下意义是最佳的: 解映射在$s<1/2$时不再是一致连续的. 最近, 在文[52]中作者不做gauge变换而采用[66]中的空间结构直接利用压缩映射原理证明了$H^{1/2}$中且L^2范数小的条件下的整体适定性, 从而能处理复值的问题, 核心的困难是高低频相互作用产生的对数发散.

KdV方程和BO方程都是如下更为广义的一类水波方程的特殊情形:

$$\partial_t u+|\partial_x|^{1+\alpha}\partial_x u=\mu\partial_x(u^k),\quad u(x,0)=u_0(x), \tag{5.7.13}$$

其中$0 \leqslant \alpha \leqslant 1$, $u: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$以及$|\partial_x|$是符号为$|\xi|$的Fourier乘子算子. 这个方程在数学上是很有意思的, 因为它能使我们看清楚方程的色散效应是如何影响适定性的. 从色散效应的强弱来看, 它介于KdV和BO方程之间, 例如当$0 < \alpha < 1$时, 类似于BO方程, 直接的压缩映射原理也是失效的, 可参考[109]. 但在这个情况下, 类似BO方程的gauge变换却失效, 从而需要有新的方法. 关于这个方程的研究, 改进的能量方法可以参考[77], 利用[67]中短时的$X^{s,b}$方法可参考[53], 利用仿微分gauge变换的方法可参考[62].

细心的读者不难发现, 在这一章我们所考虑的方程都是空间一维的情形. 对于高维的情形有没有类似的应用呢? 例如对于对于前面几章研究的Schrödinger方程. 事实上, 在高维的情形, Bourgain空间的方法也有广泛的应用, 只是相对于一维的情形而言要复杂的多. 因为对于高维的情形, 频率相互作用要复杂得多, 不再仅仅依赖频率之间的大小, 还与它们的夹角有关. 例如对于非线性项为二次型的Schrödinger方程($n = 1, 2$)

$$iu_t + \Delta u = N(u, \bar{u}),\ u(x, 0) = u_0(x),$$

其中$(x, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$, $N(u, \bar{u}) = c_1|u|^2 + c_2 u^2 + c_3 \bar{u}^2$. 利用前面几章Strichartz估计的方法只能得到$s \geqslant 0$的H^s适定性, 但是利用Bourgain空间的方法可以做到$s > -3/4$($c_1 = 0$时)和$s > -1/4$($c_1 \neq 0$时), 可以参考[82, 28]. 这些结果可以进一步被改进, 例如可以参考[7, 97]. 但是对于一般的非线性项$|u|^p u$, Bourgain空间方法并不能得到更好的低正则性结果, 但是在低正则性的整体解问题, 结合I-方法可以得到更好的结果, 例如可以参考[29]中的I-方法在二维的情形. 在本章的最后, 我们介绍KP方程, 它被认为是KdV方程的二维形式, 同样是一个重要的浅水波模型. KP-I方程由如下形式给出

$$\partial_t u + \partial_x^3 u - \partial_x^{-1}\partial_y^2 u + \partial_x(u^2/2) = 0;\ u(x, y, 0) = \phi(x, y), \tag{5.7.14}$$

其中$u(x, y, t): \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$是未知函数, ϕ是给定的初值. 如果$\partial_x^{-1}\partial_y^2 u$前面的符号是$+$, 则称为KP-II方程. 从适定性的角度看, KP-II方程研究得比较完整, 例如可以参考[16, 149, 148, 59, 60]. 对于KP-I方程, Molinet, Saut和Tzvetkov [112]证明了Picard迭代方法在H^{s_1, s_2}对任意的$s_1, s_2 \in \mathbb{R}$都失效. 改进的能量方法可见[74, 111]. 最近, Ionescu, Kenig 和Tataru [67]得到了能量空间中的整体适定性$\mathbb{E}^1 = \{\phi \in L^2(\mathbb{R}^2), \partial_x\phi \in L^2(\mathbb{R}^2), \partial_x^{-1}\partial_y\phi \in L^2(\mathbb{R}^2)\}$, 他们采用了一种新的方法, 可以看成是Bourgain空间方法和能量方法的结合, 推荐有兴趣的读者去研读. 最近, 作者[56]把他们的结果改进, 不需要条件$\partial_x^{-1}\partial_y\phi \in L^2(\mathbb{R}^2)$. 与KP-II方程相比, KP-I方程的$L^2$适定性问题仍然是一个挑战性的公开问题.

第六章　频率空间一致分解方法

波兰著名数学家 *W. Orlicz* 曾住在一个小公寓里, 他希望换一个大的, 一位工作人员回答他: “你的公寓确实小, 但是我们不能接受你的抱怨, 因为我们知道你已经有了自己的空间!”

[1]

在本章中, 我们用频率空间一致分解方法讨论(导数)NLS, NLKG方程, 我们首先对这一方法进行简单介绍. 这种方法在PDE上应用, 是由本书第一作者和合作者们系列工作发展的, 见 [179, 178, 177, 175]. 用 Q_k 表示中心在 k 边长为 1 的方体, 则 $\{Q_k\}_{k\in\mathbb{Z}^n}$ 构成$\mathbb{R}^n$ 的分解. 这种分解早在20世纪30年代被Wiener [181] 使用, 我们通常称之为 $\mathbb{R}^n$ 的Wiener分解. 我们粗略地记

$$\Box_k \sim \mathscr{F}^{-1}\chi_{Q_k}\mathscr{F}, \quad k\in\mathbb{Z}^n.$$

其中 χ_E 表示集合 E 上的特征函数. 这一分解是针对频率空间的分解, 因为 Q_k 是 Q_0 的平移, 所以这种分解在每个频率局部 Q_k 都是一样的. 我们把这种分解算子称为频率一致分解算子. 频率空间一致分解算子和Schrödigner群 $S(t)=e^{\mathrm{i}t\Delta}$ 相结合, 有很令人感兴趣的事情出现, 至少有下面的优势:

(1) $\Box_k S(t): \ L^{p'}\to L^p$ 满足不含时间奇性的一致衰减.

(2) $\Box_k S(t): \ L^p\to L^p$ 一致有界.

下面我们粗略解释一下上面的优势. 频率空间一致分解与二进制分解差别很大, 回忆二进制分解算子:

$$\triangle_k \sim \mathscr{F}^{-1}\chi_{\{|\xi|\sim 2^k\}}\mathscr{F},$$

注意到 $\{\xi:|\xi|\sim 2^k\}$ 的体积等价于 2^{nk}, 而 Q_k 的体积为 1. 这直接导致了二者的Bernstein估计差别很大:

$$\|\triangle_k f\|_q \lesssim 2^{n(1/p-1/q)k}\|\triangle_k f\|_p, \quad \|\Box_k f\|_q\lesssim \|\Box_k f\|_p, \quad p\leqslant q.$$

我们发现, 使用 $\Box_k$ 的Bernstein估计有令人感兴趣的事情出现, 估计的右端没有正则性的增加. 这导致了下面Schrödigner群 $S(t)=e^{\mathrm{i}t\Delta}$ 的估计:

$$\|\Box_k S(t)f\|_p\lesssim (1+|t|)^{-n(1/2-1/p)}\|\Box_k f\|_{p'}, \quad p\geqslant 2,\ 1/p+1/p'=1.$$

[1]W. Orlicz (1903-1990), 关于他的传记, 可见http://www.sm.luth.se/˜lech.

它与经典的 $L^{p'} \to L^p$ 估计

$$\|\triangle_k S(t)f\|_p \lesssim |t|^{-n(1/2-1/p)}\|\triangle_k f\|_{p'}$$

比较, 我们发现, 带 $\square_k$ 的估计消除了 $t=0$ 时的奇性. 回忆经典的Strichartz估计, 为了处理 $|t|^{-n(1/2-1/p)}$ 在 $t=0$ 的奇性, 我们需要条件 $n(1/2-1/p) \leqslant 1$, 这个限制是本质的. 由于条件 $n(1/2-1/p) \leqslant 1$ 的限制, 我们处理NLS方程时, 如果非线性项 $|u|^\kappa u$ 中 κ 变大时, 我们采用的办法是提高工作空间的导数正则性, 初值导数正则性相应提高.

带 $\square_k$ 的由于消除了 $t=0$ 时的奇性, 相应的Strichartz估计中条件 $n(1/2-1/p) \leqslant 1$ 可以去掉. 处理非线性项 $|u|^\kappa u$, κ 变大时, 也不再需要提高工作空间的导数正则性, 初值可以属于一类正则性较低的空间—模空间 $M_{2,1}$. 这就导致我们另辟蹊径, 可以得到高维空间中NLS方程具有弱正则性初值的适定性.

众所周知, Schrödinger群 $S(t)=e^{\mathrm{i}t\Delta}: L^p \to L^p$ 当且仅当 $p=2$. 这是我们无法在 L^p $(p\neq 2)$, 比如 L^∞ 中解非线性Schrödinger方程的主要原因之一. 但是, 对带有 $\square_k$ 的情形, 我们容易得到

$$\|\square_k S(t)f\|_p \lesssim (1+|t|)^{n|1/2-1/p|}\|\square_k f\|_p.$$

这是使用 $\square_k$ 分解另一有优势的方面. 这导致我们可以在模空间 $M_{p,1}$ 中解NLS方程.

由于频率空间的一致分解比二进制分解更加细致, 这使得Schrödinger群和 $\square_k$ $(k=(k_1,...,k_n))$的组合产生的各种带有导数(如 ∂_{x_1}) 的线性估计, 特别是各向异性的光滑效应, 极大函数估计能够更精确地反映到 k 的各个分量(如 k_1)上来, 这使得我们在研究导数NLS方程时, 处理含有导数的非线性项时比二进制分解相对容易. 这就使我们用这种方法首先得到非椭圆型的导数非线性Schrödinger方程的小初值整体适定性和散射算子的存在性. 我们在本章研究导数非线性Schrödinger方程时会进一步说明.

§6.1　频率空间一致分解, 模空间

粗略地讲, 频率空间的二进制分解和$\ell^q(L^p)$组合产生Besov空间, 频率空间一致分解和$\ell^q(L^p)$组合产生模空间. 从历史发展来看, 模空间的定义是由短时Fourier变换定义的[2], 与之有关的研究工作基本上都沿着这一定义. 在过去

[2]设$g\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, 记

$$V_g f(x,\omega)=\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\mathrm{i}t\omega}\overline{g(t-x)}f(t)dt.$$

二十多年里, 频率空间一致分解的想法并没有得到重视, Gröchenig近期的著作[49]甚至没有提到这种想法. 但是, 从PDE应用的角度来看, 频率空间一致分解和$\ell^q(X(\mathbb{R}^n))$[3]组合这样的想法看来是更重要的, 特别是在做非线性项的估计的时候, $\Box_k$对高低频的分解处理十分方便.

我们首先严格定义频率空间一致分解算子. 注意到χ_{Q_k}不能随便进行求导运算, 我们需要用光滑的截断函数代替χ_{Q_k}. 假设$\rho \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, $\rho: \mathbb{R}^n \to [0,1]$为光滑函数, 并且如果$|\xi|_\infty \leqslant 1/2$, 则$\rho(\xi) = 1$; 如果$|\xi|_\infty \geqslant 1$, 则$\rho(\xi) = 0$[4]. 假设$\rho_k$ 为ρ 的平移:

$$\rho_k(\xi) = \rho(\xi - k), \quad k \in \mathbb{Z}^n. \tag{6.1.2}$$

我们看到在Q_k 上$\rho_k(\xi) = 1$, 于是$\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \rho_k(\xi) \geqslant 1$ 对所有$\xi \in \mathbb{R}^n$ 成立. 记

$$\sigma_k(\xi) = \rho_k(\xi) \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \rho_k(\xi) \right)^{-1}, \quad k \in \mathbb{Z}^n. \tag{6.1.3}$$

则有

$$\begin{cases} |\sigma_k(\xi)| \geqslant c, & \forall\, \xi \in Q_k, \\ \operatorname{supp} \sigma_k \subset \{\xi : |\xi - k|_\infty \leqslant 1\}, \\ \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \sigma_k(\xi) \equiv 1, & \forall\, \xi \in \mathbb{R}^n, \\ |D^\alpha \sigma_k(\xi)| \leqslant C_{|\alpha|}, & \forall\, \xi \in \mathbb{R}^n,\ \alpha \in \mathbb{Z}^n_+. \end{cases} \tag{6.1.4}$$

因此, 集合

$$\Upsilon_n = \{\{\sigma_k\}_{k\in\mathbb{Z}^n} :\ \{\sigma_k\}_{k\in\mathbb{Z}^n} \text{ 满足(6.1.4)}\} \tag{6.1.5}$$

非空. 以下如无混淆, 我们则简记$\Upsilon = \Upsilon_n$. 假设$\{\sigma_k\}_{k\in\mathbb{Z}^n} \in \Upsilon$. 记

$$\Box_k := \mathscr{F}^{-1} \sigma_k \mathscr{F}, \quad k \in \mathbb{Z}^n. \tag{6.1.6}$$

$V_g f$被称为f的短时Fourier变换. 模空间的原始范数定义为

$$\|f\|_{M^s_{p,q}} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |V_g f(x,\omega)|^p dx \right)^{q/p} \langle\omega\rangle^{sq} d\omega \right)^{1/q}. \tag{6.1.1}$$

[3] X为定义在$\mathbb{R}^n$上的Banach函数空间.

[4] 对$\xi = (\xi_1, ..., \xi_n)$, $|\xi|_\infty := \max_{i=1,\dots,n} |\xi_i|$.

$\{\Box_k\}_{k\in\mathbb{Z}^n}$ 被称为频率空间一致分解算子. 对$k\in\mathbb{Z}^n$, 我们记$|k|=|k_1|+...+|k_n|$, $\langle k\rangle=1+|k|$. 设$s\in\mathbb{R}$, $0<p,q\leqslant\infty$,

$$M^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)=\left\{f\in\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n):\ \|f\|_{M^s_{p,q}}=\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}^n}\langle k\rangle^{sq}\|\Box_k f\|_p^q\right)^{1/q}<\infty\right\},\tag{6.1.7}$$

为简单, 我们又记$M^0_{p,q}=M_{p,q}$. $M^s_{p,q}$被称之为模空间[5].

§6.1.1 模空间的基本性质

我们知道, 一般说来如果$p\neq q$, $\|\cdot\|_p$和$\|\cdot\|_q$无关. 但是如果考虑频率空间的局部化, 则二者可以比较, 这也是为什么函数空间进行各种频率分解的原因之一.

引理6.1.1. 设$\Omega\subset\mathbb{R}^n$ 为紧子集, $\mathrm{diam}\,\Omega<2R$, $0<p\leqslant q\leqslant\infty$. 则存在只依赖$p,q,R$的常数$C>0$, 使得

$$\|f\|_q\leqslant C\|f\|_p,\quad \forall\ f\in L^p_\Omega,\tag{6.1.8}$$

其中$L^p_\Omega=\{f\in L^p:\mathrm{supp}\hat{f}\subset\Omega\}$.

证明. 取$\psi\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ 满足supp $\widehat{\psi}\subset B(0,\,2R)$且$\widehat{\psi}|_{B(0,R)}=1$. 由$\mathrm{diam}\,\Omega<2R$, 我们可以取到$\xi_0$满足$\Omega\subset B(\xi_0,\,R)$. 对任何$f\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)\cap L^p_\Omega$, 有$\widehat{f}=\widehat{f}\,\widehat{\psi}(\cdot-\xi_0)$, 这意味着

$$f(x)=c\int_{\mathbb{R}^n}f(x-y)e^{\mathrm{i}\xi_0 y}\psi(y)dy.$$

若$1\leqslant p\leqslant\infty$, 使用卷积Young不等式, 则可得到结论. 若$0<p<1$,

$$\|f\|_\infty\leqslant C_\psi\left(\sup_y|f(x-y)|^{1-p}\right)\int_{\mathbb{R}^n}|f(x-y)|^p dy,$$

于是得到当$q=\infty$, $0<p<1$ 时结论成立. 对一般情形$0<p\leqslant q<\infty$, 用Hölder不等式, L^q范数可以被L^p 和L^∞ 范数控制, 由此得到结论. □

引理6.1.1的证明本质上可以见[157], 我们这里想强调(6.1.8)中的常数不依赖于Ω的位置. 我们感兴趣的情况是$\Omega=Q_k$, $k\in\mathbb{Z}^n$.

[5]这里采用的是一个等价的定义. Feichtinger[40]首先定义了局部紧的Abel群上的模空间, 并用频率分解给出一个抽象的等价性表示. 不过, 对不熟悉Abel群的读者, 从Feichtinger[40] 的原文看不出(6.1.7)范数与原来范数(6.1.1)的等价性, 一个直接证明可参见[178].

引理6.1.2. (L^p_Ω-乘子估计引理) 设$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 为紧子集, $0 < r \leqslant \infty$. $\sigma_r = n(1/(r \wedge 1) - 1/2)$. 设$s > \sigma_r$. 则存在$C > 0$ 使得

$$\|\mathscr{F}^{-1}\varphi\mathscr{F}f\|_r \leqslant C\|\varphi\|_{H^s}\|f\|_r \tag{6.1.9}$$

对所有$f \in L^r_\Omega$ 和$\varphi \in H^s$ 成立.

证明. 当$r \geqslant 1$, 此结论是Bernstein乘子定理1.2.5 的推论. $r < 1$的证明可见[157]. □

命题6.1.3. (完备性). 设$0 < p, q \leqslant \infty$, $s \in \mathbb{R}$.

(1) $M^s_{p,q}$ 为完备的拟(quasi-) Banach 空间. 特别如果$1 \leqslant p, q \leqslant \infty$, 那么$M^s_{p,q}$ 为Banach空间.

(2) $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n) \subset M^s_{p,q} \subset \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$.

(3) 设$0 < p, q < \infty$, 则$\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ 在$M^s_{p,q}$ 稠密.

证明. 类似Besov空间, 从略. □

命题6.1.4. (等价范数). 假设$\{\sigma_k\}_{k\in\mathbb{Z}^n}$, $\{\varphi_k\}_{k\in\mathbb{Z}^n} \in \Upsilon$. 则$\{\sigma_k\}_{k\in\mathbb{Z}^n}$ 和$\{\varphi_k\}_{k\in\mathbb{Z}^n}$ 生成$M^s_{p,q}$上的等价范数.

证明. 注意下面的平移等式,

$$(\mathscr{F}^{-1}m\mathscr{F}f)(x) = e^{\mathrm{i}xk}\left[\mathscr{F}^{-1}m(\cdot + k)\mathscr{F}(e^{-\mathrm{i}ky}f(y))\right](x).$$

为方便, 我们记

$$\Box^\sigma_k := \mathscr{F}^{-1}\sigma_k\mathscr{F}, \quad \Box^\varphi_k := \mathscr{F}^{-1}\varphi_k\mathscr{F}.$$

注意$\Box^\sigma_k$的几乎正交性:

$$\Box^\sigma_k = \sum_{|\ell|_\infty \leqslant 1} \Box^\sigma_k \Box^\varphi_{k+\ell}, \tag{6.1.10}$$

则有

$$\|\Box^\sigma_k f\|_p \leqslant \sum_{|\ell|_\infty \leqslant 1} \|\Box^\varphi_{k+\ell}(\Box^\sigma_k f)\|_p.$$

使用乘子估计:

$$\|\Box^{\varphi}_{k+\ell}(\Box^{\sigma}_{k}f)\|_p \lesssim \|\sigma_k\|_{H^s}\|\Box^{\varphi}_{k+\ell}f\|_p, \quad s>n(1/(1\wedge p)-1/2),$$

以及$\|\sigma_k\|_{H^s}$ 关于$k\in\mathbb{Z}^n$一致有界, 立即得到

$$\|\Box^{\sigma}_{k}f\|_p \lesssim \sum_{|\ell|_\infty\leqslant 1}\|\Box^{\varphi}_{k+\ell}f\|_p,$$

从而$\|f\|^{\{\sigma_k\}}_{M^s_{p,q}} \leqslant \|f\|^{\{\varphi_k\}}_{M^s_{p,q}}$. □

命题6.1.4告诉我们, 我们可以根据实际需要选取$\{\sigma_k\}_{k\in\mathbb{Z}^n}\in\Upsilon_n$. 在PDE中, 下面的函数列是便于使用的: 设定义在$\mathbb{R}$上的函数列$\{\sigma_k\}_{k\in\mathbb{Z}}\in\Upsilon_1$, 定义

$$\sigma_k(\xi):=\sigma_{k_1}(\xi_1)\ldots\sigma_{k_n}(\xi_n), \tag{6.1.11}$$

则有$\{\sigma_k\}_{k\in\mathbb{Z}^n}\in\Upsilon_n$. 上面的$\sigma_k(\xi)$ 在频率空间的各个方向实现了变量分离.

命题6.1.5. (嵌入) 设$s_1,s_2\in\mathbb{R}$, $0<p_1,p_2,q_1,q_2\leqslant\infty$.

(1) 若$s_2\leqslant s_1$, $p_1\leqslant p_2$, $q_1\leqslant q_2$, 则有$M^{s_1}_{p_1,q_1}\subset M^{s_2}_{p_2,q_2}$.

(2) 若$q_2<q_1$, $s_1-s_2>n/q_2-n/q_1$, 则有$M^{s_1}_{p,q_1}\subset M^{s_2}_{p,q_2}$.

证明. 回忆

$$\|\Box_k f\|_{p_2}\leqslant\sum_{|\ell|_\infty\leqslant 1}\|\mathscr{F}^{-1}\sigma_k\mathscr{F}(\Box_{k+\ell}f)\|_{p_2}.$$

使用引理6.1.1,

$$\|\Box_k f\|_{p_2}\lesssim\sum_{|\ell|_\infty\leqslant 1}\|\mathscr{F}^{-1}\sigma_k\mathscr{F}(\Box_{k+\ell}f)\|_{p_1}\lesssim\sum_{|\ell|_\infty\leqslant 1}\|\Box_{k+\ell}f\|_{p_1}.$$

注意到$\ell^{q_1}\subset\ell^{q_2}$, 我们可以得到(1)的结论.

下面证明(2). 使用Hölder 不等式,

$$\begin{aligned}\|f\|_{M^{s_2}_{p,q_2}} &= \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}^n}\langle k\rangle^{s_2q_2}\|\Box_k f\|_p^{q_2}\right)^{1/q_2}\\ &\leqslant \|f\|_{M^{s_1}_{p,q_1}}\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}^n}\langle k\rangle^{(s_2-s_1)q_1q_2/(q_1-q_2)}\right)^{(q_1-q_2)/q_1q_2}.\end{aligned}\tag{6.1.12}$$

注意到

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}^n}\langle k\rangle^{(s_2-s_1)q_1q_2/(q_1-q_2)}\lesssim\sum_{i=0}^{\infty}\langle i\rangle^{n-1+(s_2-s_1)q_1q_2/(q_1-q_2)} \tag{6.1.13}$$

$s_1-s_2>n/q_2-n/q_1$ 蕴含(6.1.13) 右端为收敛级数, 从而证得(2)的结论. □

命题6.1.6. (对偶空间) 设$s\in\mathbb{R}$, $0<p,q<\infty$. 当$p\geqslant 1$, 规定$1/p+1/p'=1$; 当$0<p<1$, 规定$p'=\infty$. 则

$$(M^s_{p,q})^*=M^{-s}_{p',q'}. \tag{6.1.14}$$

命题6.1.6的证明类似Besov 空间相应的结果的证明, 见Triebel [157]. 但是当$0<p<1$时, 结果和Besov空间很不一样. 命题6.1.6的详细证明可见[177].

注记6.1.7. 当$p,q\in[1,\infty]$时, 本节的命题6.1.3, 6.1.5, 6.1.6 是由Feichtinger [40] 首先得到的, 不过在他的结论中和本书命题6.1.5对应结果有误. 当$0<p<1$ 或$0<q<1$ 时由作者[179, 177] 得到, 本书采用的证明均取自作者[179, 177], 不同于Feichtinger [40]的证明.

比作者稍晚, Kobayashi [98] 用和[179]类似的想法定义了$M_{p,q}$, 证明了命题6.1.3, 几乎与作者[177]同时, Kobayashi在另一文章[99] 讨论了$M_{p,q}$ 的对偶, 得到命题6.1.6 的部分结果: 当$0<p<1$ 或$1<q<\infty$ 时, 他证明了$M_{p',q'}\subset(M_{p,q})^*\subset M_{\infty,\infty}$. 其他情况证明了$(M_{p,q})^*=M_{p',q'}$.

§6.2 Besov空间和模空间的关系

从定义上看, Besov空间和模空间有接近的地方, 一个是二进制分解和$\ell^q(L^p)$组合, 另一个是频率一致分解和$\ell^q(L^p)$组合. 下面我们给出二者的包含关系.

定理 6.2.1. (嵌入定理) 设$0<p,q\leqslant\infty$, $s_1,s_2\in\mathbb{R}$. 我们有下面的结论.

(1) $B^{s_1}_{p,q}\subset M^{s_2}_{p,q}$ 当且仅当$s_1\geqslant s_2+\tau(p,q)$, 其中

$$\tau(p,q)=\max\left\{0,\ n\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{p}\right),\ n\left(\frac{1}{q}+\frac{1}{p}-1\right)\right\};$$

(2) $M^{s_1}_{p,q}\subset B^{s_2}_{p,q}$ 当且仅当$s_1\geqslant s_2+\sigma(p,q)$, 其中

$$\sigma(p,q)=\max\left\{0,\ n\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right),\ n\left(1-\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)\right\}.$$

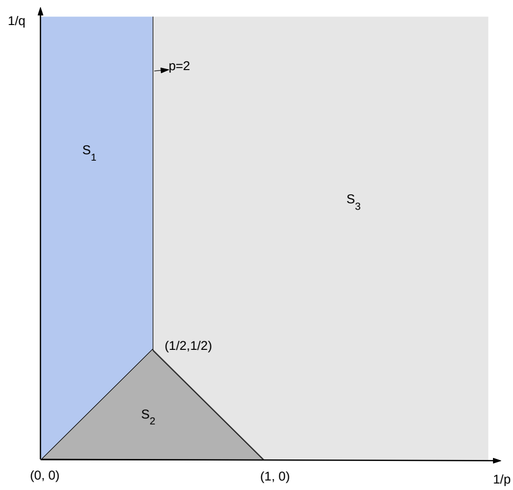


图 6.1: $\tau(p,q)$ 在$\mathbb{R}_+^2$ 的分布图: 在S_1中$\tau(p,q) = n(\frac{1}{q}-\frac{1}{p})$; 在$S_2$中$\tau(p,q) = 0$; 在$S_3$中$\tau(p,q) = n(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}-1)$.

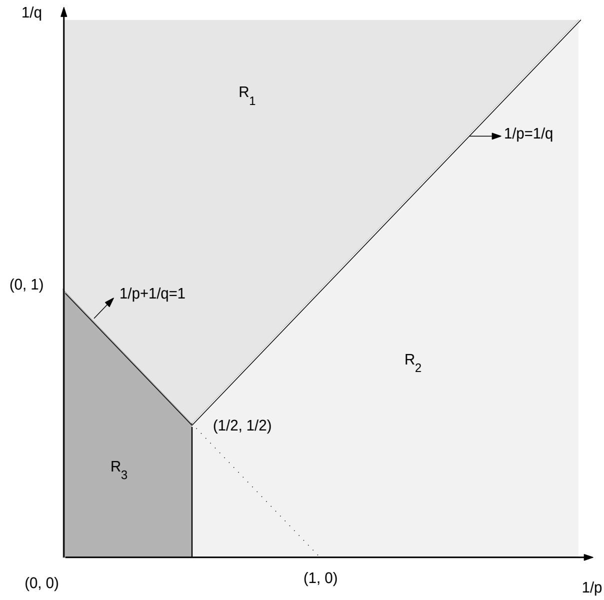


图 6.2: $\sigma(p,q)$ 的分布图: R_1 中$\sigma(p,q)=0$; R_2 中$\sigma(p,q)=n(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})$; R_3 中$\sigma(p,q)=n(1-\frac{1}{p}-\frac{1}{q})$.

定理6.2.1首先由P. Gröbner [48]用德文写的博士论文中讨论了$(1/p,1/q)\in[0,1]^2$时的情况, 他的结果没有发表过, 当$(1/p,1/q)$在正方形$[0,1]^2$的四个顶点时, Gröbner给出的结果和定理6.2.1的充分性一样, 但是Gröbner搞错了$p=2$时的嵌入, 他认为$B^n_{2,1}\subset M_{2,1}$是最佳嵌入(事实上$B^{n/2}_{2,1}\subset M_{2,1}$为最佳嵌入). 随后J. Toft [158]得到$(1/p,1/q)\in[0,1]^2$时定理6.2.1的充分性. 再后M. Sugimoto, N. Tomita [145]证明了$(1/p,1/q)\in[0,1]^2$时定理6.2.1的第一个嵌入的必要性, 用对偶关系, 他们也得到第二个嵌入当$(1/p,1/q)\in[0,1]^2$, $p,q\neq\infty$时也是必要的. 作者[179, 178, 177]采用频率一致分解的方法证明了定理6.2.1的全部结论. [145]必要性的证明基于模空间的dilation性质, 作者[179, 178, 177]给出的必要性证明是用频率空间分解的想法直接构造反例, 证明比[145]简单.

下面是定理6.2.1常用的特例.

推论6.2.2. 我们有下面的结论.

$$B^{s+n/2}_{2,1}\subset M^s_{2,1}\subset B^s_{2,1},\quad B^{s+n}_{\infty,1}\subset M^s_{\infty,1}\subset B^s_{\infty,1}.$$

从PDE的角度来看, 上面的嵌入定理是很重要的, 我们给出详细证明. 定理6.2.1的证明需要下面系列引理. 基本的想法是先对一类特殊的p,q, 先证明

结论, 一般情形由复插值证明. 下面定理的证明综合了[48, 179, 178, 177]的证明, 不同于[158], [145]的证明.

引理6.2.3. 设$0 < p, q \leqslant \infty$. 下面的嵌入成立.

$$M_{p,q} \subset B^0_{p,q}, \quad \forall\, q \leqslant p \wedge 1,$$
$$M^{n(1/(p\wedge 1)-1/q)}_{p,q} \subset B^0_{p,q}, \quad \forall\, q \geqslant 1 \wedge p.$$

证明. 首先证明第一个嵌入.

$$\|f\|^q_{B^0_{p,q}} = \sum_{k=0}^{\infty} \|\triangle_k f\|^q_p. \tag{6.2.1}$$

情形*1*. $q < 1$, $p \geqslant 1$. 令$a_k = \max(0, 2^{k-1} - \sqrt{n})$, $b_k = 2^{k+1} + \sqrt{n}$. 注意到当$|i| \notin [a_k, b_k]$时$\Delta_k \Box_i f = 0$, 我们得到

$$\|\triangle_k f\|^q_p \leqslant \left(\sum_{i\in\mathbb{Z}^n,\ |i|\in[a_k,b_k]} \|\triangle_k(\Box_i f)\|_p \right)^q \lesssim \sum_{i\in\mathbb{Z}^n,\ |i|\in[a_k,b_k]} \|\Box_i f\|^q_p. \tag{6.2.2}$$

(6.2.2)蕴含所要的结果.

情形*2*. $q < 1$, $p < 1$. 从$p < 1$, $q/p \leqslant 1$ 看到

$$\begin{aligned}\|\triangle_k f\|^q_p &\leqslant \left(\sum_{i\in\mathbb{Z}^n,\ |i|\in[a_k,b_k]} \int |\triangle_k(\Box_i f)(x)|^p dx \right)^{q/p} \\ &\leqslant \sum_{i\in\mathbb{Z}^n,\ |i|\in[a_k,b_k]} \|\triangle_k(\Box_i f)\|^q_p.\end{aligned} \tag{6.2.3}$$

由L^p_Ω乘子估计引理, $\Delta_k\Box_i : L^p_{B(i,\sqrt{n})} \to L^p_{B(i,\sqrt{n})}$. 由(6.2.3)便得到结论.

下面, 我们证明第二个嵌入. 还是分成两种情形.

情形*1*. $p \geqslant 1$. 记

$$\Lambda_0 = \{k \in \mathbb{Z}^n :\ B(k, \sqrt{n}) \cap \{\xi :\ |\xi| \in [0, 2)\} \neq \emptyset\}, \tag{6.2.4}$$
$$\Lambda_j = \{k \in \mathbb{Z}^n :\ B(k, \sqrt{n}) \cap \{\xi :\ |\xi| \in [2^{j-1}, 2^{j+1})\} \neq \emptyset\}, \quad j \geqslant 1. \tag{6.2.5}$$

由L^p_Ω乘子估计引理,

$$\|\triangle_j f\|_p \lesssim \sum_{k\in\Lambda_j} \sum_{|\ell|_\infty\leqslant 1} \|\triangle_j \Box_{k+\ell} \Box_k f\|_p \lesssim \sum_{k\in\Lambda_j} \|\Box_k f\|_p, \tag{6.2.6}$$

由$q \geqslant p \wedge 1$, 有

$$(a_1 + \dots + a_m)^q \leqslant m^{q-1}(a_1^q + \dots + a_m^q). \tag{6.2.7}$$

对$k \in \Lambda_j$, 有$|k| \sim 2^j$; 并且Λ_j 最多和$O(2^{nj})$ 多个单位方体有交, 从而

$$\begin{aligned} \|f\|_{B^0_{p,q}}^q &\lesssim \sum_{j=0}^{\infty} \left(\sum_{k \in \Lambda_j} \|\Box_k f\|_p \right)^q \\ &\lesssim \sum_{j=0}^{\infty} 2^{jn(q-1)} \sum_{k \in \Lambda_j} \|\Box_k f\|_p^q \\ &\lesssim \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k \in \Lambda_j} \langle k \rangle^{n(q-1)} \|\Box_k f\|_p^q \\ &\lesssim \|f\|_{M_{p,q}^{n(1-1/q)}}^q. \end{aligned} \tag{6.2.8}$$

情形2. $p < 1$. 由于$q/p > 1$, 所以

$$(a_1 + \dots + a_m)^{q/p} \leqslant m^{q/p-1}(a_1^{q/p} + \dots + a_m^{q/p}). \tag{6.2.9}$$

由L^p_Ω乘子估计引理,

$$\begin{aligned} \|\triangle_j f\|_p^q &\lesssim \left(\sum_{k \in \Lambda_j} \sum_{\ell \in \Lambda} \int_{\mathbb{R}^n} |\triangle_j \Box_{k+\ell} \Box_k f|^p dx \right)^{q/p} \\ &\lesssim 2^{jn(q/p-1)} \sum_{k \in \Lambda_j} \|\Box_k f\|_p^q. \end{aligned} \tag{6.2.10}$$

类似情形1, 可以得到结论. □

引理6.2.4. 下面嵌入成立:

$$B_{2,q}^{n(1/q-1/2)} \subset M_{2,q}, \quad \forall\, 0 < q \leqslant 2.$$

证明. 由Plancherel 等式, 有

$$\|f\|_{M_{2,q}}^q \sim \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \|\chi_{Q_k} \widehat{f}\|_2^q. \tag{6.2.11}$$

记$\Lambda_j = \{k \in \mathbb{Z}^n : \ |k| \in [2^{j-1}, 2^j)\}$. 设$L \gg 1$, 则有

$$\|f\|_{M_{2,q}}^q \lesssim \sum_{|k| \leqslant 2^L} \|\chi_{Q_k} \widehat{f}\|_2^q + \sum_{j=L}^{\infty} \sum_{k \in \Lambda_j} \|\chi_{Q_k} \widehat{f}\|_2^q. \tag{6.2.12}$$

易见Λ_j 最多有$O(2^{nj})$ 个元素. 从而有

$$\begin{aligned}\|f\|_{M_{2,q}}^q &\lesssim \|f\|_2^q + \sum_{j=L}^{\infty} 2^{jn(1-q/2)} \left\| \sum_{k\in\Lambda_j} \chi_{Q_k} \widehat{f} \right\|_2^q . \\ &\lesssim \|f\|_2^q + \sum_{j=L}^{\infty} 2^{jn(1-q/2)} \|\chi_{|\cdot|\in(2^{j-2},2^{j+1})} \widehat{f}\|_2^q . \\ &\lesssim \|f\|_{B_{2,q}^{n(1/q-1/2)}}^q , \end{aligned} \tag{6.2.13}$$

这正是我们想要的结果. □

引理6.2.5. 设$1 \leqslant p, q \leqslant \infty$. 我们有

$$M_{p,q}^{\sigma(p,q)} \subset B_{p,q}^0, \quad \sigma(p,q) = \max\left(0,\ n\left(\frac{1}{p\wedge p'} - \frac{1}{q}\right)\right). \tag{6.2.14}$$

证明. 由引理6.2.3, 引理6.2.4的对偶形式, 有

$$M_{p,\infty}^{n} \subset B_{p,\infty}^0, \quad 1 \leqslant p \leqslant \infty, \tag{6.2.15}$$

$$M_{2,q}^{n(1/2-1/q)} \subset B_{2,q}^0, \quad 2 \leqslant q \leqslant \infty. \tag{6.2.16}$$

取$p = 1, \infty$ 和$q = \infty$, 则有

$$M_{1,\infty}^{n} \subset B_{1,\infty}^0, \quad M_{2,\infty}^{n/2} \subset B_{2,\infty}^0, \quad M_{\infty,\infty}^{n} \subset B_{\infty,\infty}^0. \tag{6.2.17}$$

(6.2.17) 的两端分别进行复插值(见附录),

$$M_{p,\infty}^{\max(n/p,\, n/p')} \subset B_{p,\infty}^0, \quad 1 \leqslant p \leqslant \infty. \tag{6.2.18}$$

引理6.2.3 也蕴含

$$M_{p,1} \subset B_{p,1}^0, \quad 1 \leqslant p \leqslant \infty. \tag{6.2.19}$$

回忆

$$M_{2,2} = B_{2,2}^0. \tag{6.2.20}$$

(6.2.18)–(6.2.20)进行复插值运算, 可得到结论. □

当$0 < p < 1$时, 我们还需要下面的乘子估计(见Peetre [133], Triebel [157]).

命题6.2.6. 设$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 为紧子集, $0 < p \leqslant 1$. 则有

$$\|\mathscr{F}^{-1} M \mathscr{F} f\|_p \lesssim \|M\|_{B_{2,p}^{n(1/p-1/2)}} \|f\|_p$$

对所有$f \in L_\Omega^p$, $M \in B_{2,p}^{n(1/p-1/2)}$ 成立.

推论6.2.7. 设$b > 0$, $0 < p \leqslant 1$. 则

$$\|\mathscr{F}^{-1} M \mathscr{F} f\|_p \leqslant C \|M(b\,\cdot)\|_{B_{2,p}^{n(1/p-1/2)}} \|f\|_p$$

对所有$f \in L_{B(0,b)}^p$, $M \in B_{2,p}^{n(1/p-1/2)}$ 成立, 其中$C > 0$ 和$b > 0$ 无关.

如果$f \in L_{B(0,b)}^p$, 则$f(b^{-1}\,\cdot) \in L_{B(0,1)}^p$. 由

$$(\mathscr{F}^{-1} M \mathscr{F} f)(x) = [\mathscr{F}^{-1} M(b\,\cdot) \widehat{f(b^{-1}\,\cdot)}](bx),$$

使用命题6.2.6 就可以得到推论6.2.7.

引理6.2.8. 设$0 < p \leqslant \infty$. 则有

$$B_{p,\infty}^{n(1/(p\wedge 1)-1)} \subset M_{p,\infty}. \tag{6.2.21}$$

证明. 首先考虑$0 < p < 1$. 由推论6.2.7, 对$|k| \gg 1$, $|k| \in [2^{j-1}, 2^j)$,

$$\begin{aligned} \|\Box_k f\|_p &= \left\| \mathscr{F}^{-1} \sigma_k \sum_{\ell=-4}^{4} \varphi_{j+\ell} \mathscr{F} f \right\|_p \\ &\lesssim \|\sigma_k(2^{j+5}\,\cdot)\|_{B_{2,p}^{n(1/p-1/2)}} \sum_{\ell=-4}^{4} \|\triangle_{j+\ell} f\|_p. \end{aligned} \tag{6.2.22}$$

用Besov空间的scaling (见[157])

$$\|g(\lambda\,\cdot)\|_{B_{p,q}^s} \leqslant \lambda^{s-n/p} \|g\|_{B_{p,q}^s}, \quad \lambda \gtrsim 1,$$

可以得到[6]

$$\|\sigma_k(2^{j+5}\,\cdot)\|_{B_{2,p}^{n(1/p-1/2)}} \lesssim 2^{jn(1/p-1)} \|\sigma_k\|_{B_{2,p}^{n(1/p-1/2)}} \lesssim 2^{jn(1/p-1)}. \tag{6.2.23}$$

[6] 在$M_{p,q}^s$的定义中, 我们总是假设$\sigma_k = \sigma_0(\cdot - k)$.

将(6.2.23) 代入到(6.2.22), 立即得到

$$\|\Box_k f\|_p \lesssim 2^{jn(1/p-1)} \sum_{\ell=-4}^{4} \|\triangle_{j+\ell} f\|_p \,. \tag{6.2.24}$$

由(6.2.24), 得到(6.2.21)成立.

下面考虑$p>1$ 的情形. 由Young不等式, 当$|k| \gg 1$,

$$\begin{aligned} \|\Box_k f\|_p &= \left\| \mathscr{F}^{-1}\sigma_k \sum_{\ell=-4}^{4} \varphi_{j+\ell}\mathscr{F} f \right\|_p \\ &\lesssim \|\mathscr{F}^{-1}\sigma_k\|_1 \sum_{\ell=-4}^{4} \|\triangle_{j+\ell} f\|_p \lesssim \sum_{\ell=-4}^{4} \|\triangle_{j+\ell} f\|_p \,. \end{aligned} \tag{6.2.25}$$

这蕴含结论. □

定理6.2.1 的证明. (充分性) 先证明$M^{s+\sigma(p,q)}_{p,q} \subset B^s_{p,q}$. 由引理6.2.5得到, 当$1 \leqslant p,q \leqslant \infty$ 时结论成立. 当$0<p\leqslant 1$或者$0<q<1$时, 由引理6.2.3 可以得到结果.

再证明$B^{s+\tau(p,q)}_{p,q} \subset M^s_{p,q}$. 记$\mathbb{R}^2_+ = \{(1/p,1/q) : 1/p,\ 1/q \geqslant 0\}$, 回忆

$$\begin{aligned} S_1 &= \{(1/p,\ 1/q) \in \mathbb{R}^2_+ :\ 1/q \geqslant 1/p,\ 1/p \leqslant 1/2\}; \\ S_2 &= \{(1/p,\ 1/q) \in \mathbb{R}^2_+ :\ 1/q \leqslant 1/p,\ 1/p + 1/q \leqslant 1\}; \\ S_3 &= \mathbb{R}^2_+ \setminus (S_1 \cup S_2). \end{aligned}$$

首先考虑$(1/p,1/q) \in S_3$. 此时$\tau(p,q) = n(1/p+1/q-1)$. 取(p_0,q_0)和(p_1,q_1) 满足

$$\begin{aligned} &\frac{1}{p_0} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}, \quad \frac{1}{q_0} = 0; \\ &\frac{1}{p_1} = \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{q_1} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

设$\theta = \frac{1}{q}(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}-\frac{1}{2})^{-1}$, 则有

$$\begin{aligned} &\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}, \quad \frac{1}{q} = \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1}; \\ &\frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1 = (1-\theta)\left(\frac{1}{p_0} - 1\right) + \left(\frac{1}{q_1} - \frac{1}{2}\right)\theta. \end{aligned}$$

使用引理6.2.4, 6.2.8,

$$B_{2,q_1}^{n(1/q_1-1/2)} \subset M_{2,q_1}, \quad B_{p_0,\infty}^{n(1/p_0-1)} \subset M_{p_0,\infty}.$$

复插值运算得到,

$$B_{p,q}^{n(1/p+1/q-1)} \subset M_{p,q}.$$

其次, 考虑情形$(1/p,1/q) \in S_1$. 如果$(1/p,1/q) \in \dot{S}_1$ ($\dot{S}_1 = S_1$的内点集合), $(1/p,1/q)$ 可以在$(1/\infty,1/\infty)$ 和线段$\{(1/p,1/q) : p=2, q<2\}$ 上某点$(1/p_1,1/q_1)$的连线上, 从而由复插值得到

$$B_{p,q}^{n(1/q-1/p)} \subset M_{p,q}. \tag{6.2.26}$$

最后考虑情形$(1/p,1/q) \in S_2$. 这可由第一个嵌入的对偶形式得到.

(必要性) 我们需要证明对任何$0<\eta \ll 1$,

$$B_{p,q}^{\tau(p,q)-\eta} \not\subset M_{p,q}. \tag{6.2.27}$$

情形 1.1. $(1/p,1/q) \in S_3$. 设$f = \mathscr{F}^{-1}\varphi_j$, $j \gg 1$. 我们有

$$\begin{aligned}\|f\|_{B_{p,q}^{\tau(p,q)-\eta}}^q &= \sum_{\ell=-1}^{1} 2^{q(\tau(p,q)-\eta)(j+\ell)} \|\mathscr{F}^{-1}\varphi_{j+\ell}\varphi_j\|_p^q \\ &\lesssim 2^{q(n/q-\eta)j}.\end{aligned} \tag{6.2.28}$$

不失一般性, 我们可以认为

$$\varphi_j(\xi) = 1, \quad \forall \ \xi \in D_j := \left\{\xi : \frac{5}{4}\cdot 2^{j-1} \leqslant |\xi| \leqslant \frac{3}{4}\cdot 2^{j+1}\right\}.$$

注意

$$\Lambda_j = \{k \in \mathbb{Z}^n : B(k,\sqrt{n}) \subset D_j\}$$

包含至少$O(2^{jn})$ 多个个点, 有

$$\|f\|_{M_{p,q}}^q = \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \|\square_k \mathscr{F}^{-1}\varphi_j\|_p^q \geqslant \sum_{k\in\Lambda_j} \|\mathscr{F}^{-1}\sigma_k\varphi_j\|_p^q \gtrsim 2^{nj}. \tag{6.2.29}$$

由(6.2.28) 和(6.2.29),

$$\|f\|_{M_{p,q}} \gtrsim 2^{\eta j}\|f\|_{B_{p,q}^{\tau(p,q)-\eta}},$$

这蕴含了(6.2.27).

情形 1.2. $(1/p,1/q)\in S_2$. 先考察$q=\infty$ 的情形. 取$k(j)=(2^j,0,...,0)$ 和$f=\mathscr{F}^{-1}\sigma_{k(j)}$, 我们看到

$$\|f\|_{M_{p,\infty}}\gtrsim 1\gtrsim 2^{\eta j}\|f\|_{B^{-\eta}_{p,\infty}}.$$

若$q<\infty$, 我们来证明

$$M_{p,q}\not\subset B^{\varepsilon}_{p,r}\cup B^{\varepsilon}_{\infty,\infty}. \tag{6.2.30}$$

设$f\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ 为Schwartz 函数满足$\mathrm{supp}\widehat{f}\subset\{\xi:|\xi_i|<1/2,\ i=1,...,n\}$. 设$N\gg 1,\ 0<\varepsilon\ll 1$,

$$k(j)=(2^{Nj},0,...,0)\in\mathbb{Z}^n, \tag{6.2.31}$$

$$\widehat{F}(\xi)=\sum_{j=1}^{\infty}2^{-\varepsilon Nj}\widehat{f}(\xi-k(j)). \tag{6.2.32}$$

注意$\mathrm{supp}\widehat{F}\subset\cup_{j=1}^{\infty}Q_{k(j)}$, 则可以得到

$$\Box_k F=0\ \text{ if }\ k\neq k(j)+\ell,\quad |\ell|_\infty\leqslant 1. \tag{6.2.33}$$

由于$N\gg 1$, 人们知道

$$\begin{aligned}\|F\|^q_{M_{p,q}}&\leqslant\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{|\ell|_\infty\leqslant 1}\|\Box_{k(j)+\ell}F\|^q_p.\\&\leqslant\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{|\ell|_\infty\leqslant 1}2^{-\varepsilon Nqj}\|\mathscr{F}^{-1}\sigma_{k(j)+\ell}\widehat{f}(\cdot-k(j))\|^q_p\\&=\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{|\ell|_\infty\leqslant 1}2^{-\varepsilon Nqj}\|\Box_\ell f\|^q_p\lesssim 1,\end{aligned} \tag{6.2.34}$$

这导致$F\in M_{p,q}$. 另一方面, 取$s>\varepsilon$, 有

$$\begin{aligned}\|F\|^r_{B^s_{p,r}}&\geqslant\sum_{j=1}^{\infty}2^{srj}\|\triangle_j F\|^r_p.\\&\gtrsim\sum_{j=1}^{\infty}2^{srNj}\|\triangle_{Nj}F\|^r_p\\&\gtrsim\sum_{j=1}^{\infty}2^{(s-\varepsilon)rNj}\|\mathscr{F}^{-1}\varphi_{Nj}\chi_{Q_{k(j)}}\widehat{f}(\cdot-k(j))\|^r_p,\end{aligned} \tag{6.2.35}$$

这里$\varphi_j=\varphi(2^{-j}\cdot)$. 可以认为当$|\xi|\in[3/4,5/4]$时$\varphi(\xi)=1$, 于是,

$$\mathscr{F}^{-1}\varphi_{Nj}\chi_{Q_{k(j)}}\widehat{f}(\cdot-k(j))=\mathscr{F}^{-1}\chi_{Q_{k(j)}}\widehat{f}(\cdot-k(j)). \tag{6.2.36}$$

由(6.2.35) 和(6.2.36),

$$\|F\|^r_{B^s_{p,r}}\gtrsim\sum_{j=1}^{\infty}2^{(s-\varepsilon)rNj}=\infty. \tag{6.2.37}$$

上述讨论也说明$F\notin B^s_{\infty,\infty}$.

情形 1.3. $(1/p,1/q)\in S_1$. 可以认为当$\xi\notin\tilde{Q}_k:=\{\xi:|\xi_i-k_i|\leqslant 5/8,\ 1\leqslant i\leqslant n\}$时$\sigma_k(\xi)=0$, 当$\xi\in D_j(=\{\xi:\frac{5}{4}\cdot 2^{j-1}\leqslant|\xi|\leqslant\frac{3}{4}\cdot 2^{j+1}\})$时二进制分解函数满足$\varphi_j(\xi)=1$. 设

$$A_j=\{k\in\mathbb{Z}^n:\tilde{Q}_k\subset D_j\},\quad j\gg 1. \tag{6.2.38}$$

易见A_j最多有$O(2^{nj})$ 个元素. 设$f\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ 为径向Schwartz函数满足$\mathrm{supp}\hat{f}\subset B(0,\,1/8)$,

$$g(x)=\sum_{k\in A_j}e^{\mathrm{i}xk}(\tau_kf)(x),\quad \tau_kf=f(\cdot-k). \tag{6.2.39}$$

注意$\mathrm{supp}\,\widehat{\tau_kf}\subset B(0,1/8)$, 可见$\mathrm{supp}\,\tau_k(\widehat{\tau_kf})\cap\mathrm{supp}\,\sigma_\ell=\emptyset$, $k\neq\ell$. 于是

$$\begin{aligned}\|g\|_{M_{p,q}}&\geqslant\left(\sum_{k\in A_j}\|\mathscr{F}^{-1}\sigma_k\mathscr{F}g\|_p^q\right)^{1/q}\\&=\left(\sum_{k\in A_j}\|\mathscr{F}^{-1}\sigma_0(\widehat{\tau_kf})\|_p^q\right)^{1/q}\gtrsim 2^{jn/q}\end{aligned} \tag{6.2.40}$$

另一方面, $\mathrm{supp}\,\hat{g}\subset\{\xi:\,2^{j-1}\leqslant|\xi|\leqslant 2^{j+1}\}$. 因此,

$$\|g\|_{B^{n(1/q-1/p)-\eta}_{p,q}}\leqslant\left(\sum_{\ell=-1}^{1}2^{nj(1-q/p)-\eta jq}\|\mathscr{F}^{-1}\varphi_{j+\ell}\mathscr{F}g\|_p^q\right)^{1/q}. \tag{6.2.41}$$

使用乘子估计和Hölder 不等式,

$$\|\mathscr{F}^{-1}\varphi_{j+\ell}\mathscr{F}g\|_p\lesssim\|g\|_p\leqslant\|g\|_\infty^{1-2/p}\|g\|_2^{2/p}. \tag{6.2.42}$$

由Plancherel等式,

$$\|g\|_2 = \|\hat{g}\|_2 = \left(\int_{\mathbb{R}^n} \sum_{k \in A_j} |\tau_k (e^{-\mathrm{i}k\xi} \hat{f}(\xi))|^2 d\xi \right)^{1/2} \lesssim 2^{nj/2}. \qquad (6.2.43)$$

可以进一步设$f(x) = f(|x|)$ 为$|x|$ 的单调减函数. 由$f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, 我们有

$$|f(x-k)| \lesssim (1+|x-k|)^{-N}, \quad N \gg 1. \qquad (6.2.44)$$

记

$$B_0 = \{k \in A_j : |x-k| \leqslant 2\}, \quad B_i = \{k \in A_j : 2^i < |x-k| \leqslant 2^{i+1}\}.$$

B_i 包含至多$O(2^{n\,i})$ 个成员. 从(6.2.44) 可以看到

$$|g(x)| \leqslant \sum_{i \geqslant 0} \sum_{k \in B_i} |f(x-k)| \lesssim f(0) + \sum_{i \geqslant 1} 2^{ni} |f(2^i)| \lesssim \sum_{i \geqslant 0} 2^{(n-N)i} \lesssim 1. \qquad (6.2.45)$$

综合(6.2.42), (6.2.43) and (6.2.45), we have

$$\|\mathscr{F}^{-1} \varphi_{j+\ell} \mathscr{F} g\|_p \lesssim 2^{nj/p}. \qquad (6.2.46)$$

将(6.2.46) 代入(6.2.41), 然后使用(6.2.40), 立即有

$$\|g\|_{B^{n(1/q-1/p)-\eta}_{p,q}} \lesssim 2^{nj/q-\eta j} \lesssim 2^{-\eta j} \|g\|_{M_{p,q}}. \qquad (6.2.47)$$

这蕴含结论.

下面证明第二个嵌入的必要性. 只要证明

$$M^{\sigma(p,q)-\eta}_{p,q} \not\subset B^0_{p,q}, \quad \forall \eta > 0. \qquad (6.2.48)$$

注意

$$R_1 = \{(1/p,\, 1/q) \in \mathbb{R}^2_+ : 1/q \geqslant 1/p,\ 1/p + 1/q \geqslant 1\};$$
$$R_2 = \{(1/p,\, 1/q) \in \mathbb{R}^2_+ : 1/q \leqslant 1/p,\ 1/p \geqslant 1/2\};$$
$$R_3 = \mathbb{R}^2_+ \setminus (R_1 \cup R_2).$$

考虑下面三种情形.

情形 2.1. $(1/p,\, 1/q) \in R_1$. 这种情形我们已在情形1.1证明过了.

情形 2.2. $(1/p,\ 1/q)\in R_3$. 假设存在$\eta>0$, $M^{n(1-1/p-1/q)-\eta}_{p,q}\subset B^0_{p,q}$, 我们来导出矛盾. 若$1\leqslant p,q<\infty$, 由对偶性$B^0_{p',q'}\subset M^{-n(1/p'+1/q'-1)+\eta}_{p',q'}$, 这和第一个嵌入矛盾. 如果$p=\infty$或$q=\infty$, 可以使用与情形2.1 相似的技巧证明. 事实上, 设$f=\mathscr{F}^{-1}\varphi_j$, 有

$$\|f\|_{B^0_{p,q}}\geqslant\|\mathscr{F}^{-1}\varphi_j\varphi_j\|_p\gtrsim 2^{nj(1-1/p)}. \tag{6.2.49}$$

另一方面,

$$\|f\|_{M^{n/p'}_{p,\infty}}\leqslant\sup_k\langle k\rangle^{n(1-1/p)}\|\mathscr{F}^{-1}\sigma_k\varphi_j\|_p\lesssim 2^{nj(1-1/p)}, \tag{6.2.50}$$

$$\|f\|_{M^{n/q'}_{\infty,q}}\leqslant\left(\sum_{|k|\in[2^{j-1},2^{j+1}]}2^{nj(q-1)}\|\mathscr{F}^{-1}\sigma_k\varphi_j\|^q_\infty\right)^{1/q}\lesssim 2^{nj}. \tag{6.2.51}$$

从(6.2.49)–(6.2.51), 便知(6.2.48) 在$p=\infty$ 或$q=\infty$ 的情形也对.

情形 2.3. $(1/p,\ 1/q)\in R_2$. 设$f\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ 满足$f(0)=1$, $\operatorname{supp}\hat{f}\subset Q_0$. 选取$0<a\ll 1$ (将在下面(6.2.57)中被固定), 记$f_a(x)=f(x/a)$. 我们看到$\operatorname{supp}\hat{f}_a\subset Q_{0,a}:=\{\xi:\ |\xi_i|\leqslant 1/2a,\ 1\leqslant i\leqslant n\}$. 回忆$D_j=\{\xi:\frac{5}{4}\cdot 2^{j-1}\leqslant|\xi|\leqslant\frac{3}{4}\cdot 2^{j+1}\}$ 最多包含$O(a^n2^{jn})$ 个互不相交的方体$Q_{k(i),a}:=k(i)+Q_{0,a}$, $i=1,...,O(a^n2^{jn})$. 记$A_j=\{k(i):i=1,...,O(a^n2^{jn})\}$,

$$g(x)=\sum_{k\in A_j}e^{\mathrm{i}xk}(\tau_kf_a)(x). \tag{6.2.52}$$

对任何$N\gg 1$,

$$|f(x)|\leqslant C_N(1+|x|)^{-N}, \tag{6.2.53}$$

从而

$$|f_a(x)|\leqslant C_Na^N|x|^{-N}. \tag{6.2.54}$$

由$f(x)$ 的连续性且$f(0)=1$, 推出存在$\varrho>0$ 使得[7]

$$|f_a(x)|>1/2,\quad x\in B(0,\ \varrho). \tag{6.2.55}$$

从(6.2.52) 和(6.2.55)得到, 对任何$x\in B(k(i),\varrho)$,

$$|g(x)|\geqslant|f_a(x-k(i))|-\sum_{k\in A_j\backslash\{k(i)\}}|f_a(x-k)|$$

[7]事实上ϱ 可以取成$\varrho=a\varrho_0$, $\varrho_0>0$ 仅依赖于f, 与a 无关.

$$\geqslant \frac{1}{2} - \sum_{k \in A_j \setminus \{k(i)\}} |f_a(x-k)|. \tag{6.2.56}$$

记$A_{j,\ell} := \{k \in A_j : 2^\ell \leqslant |k-k(i)| < 2^{\ell+1}\}$. 可以进一步假设$f(x)$ 是$|x|$ 的单调递减函数. 由于$A_{j,\ell}$ 最多有$O(a^n 2^{\ell n})$ 成员, 对任何$x \in B(k(i), \varrho)$,

$$\begin{aligned}\sum_{k \in A_j \setminus \{k(i)\}} |f_a(x-k)| &\leqslant \sum_{\ell \geqslant 1} \sum_{k \in A_{j,\ell}} |f_a(x-k)| \\ &\leqslant C \sum_{\ell \geqslant 1} a^n 2^{n\ell} |f_a(2^\ell - \varrho)| \\ &\lesssim \sum_{\ell \geqslant 1} C_N a^{n+N} 2^{(n-N)\ell} \leqslant 1/4,\end{aligned} \tag{6.2.57}$$

其中$N \geqslant n+1$, $CC_N a^{n+N} \leqslant 1/4$. 因此, 从(6.2.56) 和(6.2.57) 导出

$$|g(x)| \geqslant 1/4, \quad x \in B(k(i), \varrho). \tag{6.2.58}$$

从而, 使用(6.2.58), 有

$$\|g(x)\|_p \geqslant \left\| \sum_{i=1}^{O(a^n 2^{nj})} \frac{1}{4} \chi_{B(k(i),\varrho)} \right\|_p \gtrsim (a\varrho)^{n/p} 2^{nj/p}, \tag{6.2.59}$$

其中ϱ 和a 不依赖于$j \gg 1$. 可以假设$\varphi_j(\xi) = 1$, $\xi \in D_j$. 由于$\operatorname{supp} \hat{g} \subset D_j$, 有$\mathscr{F}^{-1} \varphi_j \mathscr{F} g = g$. 因此, (6.2.59) 导致了

$$\|g\|_{B^0_{p,q}} \geqslant \|\mathscr{F}^{-1} \varphi_j \mathscr{F} g\|_p \gtrsim (a\varrho)^{n/p} 2^{nj/p}. \tag{6.2.60}$$

另一方面,

$$\begin{aligned}\|g\|_{M^{n(1/p-1/q)}_{p,q}} &= \left(\sum_{|k| \in [2^{j-1}, 2^{j+1}]} 2^{nj(q/p-1)} \|\mathscr{F}^{-1} \sigma_k \mathscr{F} g\|_p^q \right)^{1/q} \\ &\leqslant 2^{nj/p} \sup_{|k| \in [2^{j-1}, 2^{j+1}]} \|\mathscr{F}^{-1} \sigma_k \mathscr{F} g\|_p.\end{aligned} \tag{6.2.61}$$

因为$\operatorname{supp} \sigma_k$ 最多和有限个$\operatorname{supp} \tau_\ell(\widehat{\tau_\ell f_a})$ 相交, 使用乘子估计,

$$\|\mathscr{F}^{-1} \sigma_k \mathscr{F} g\|_p \lesssim \|f\|_p. \tag{6.2.62}$$

因此, (6.2.61) 和(6.2.62) 蕴含了

$$\|g\|_{M^{n(1/p-1/q)}_{p,q}} \lesssim 2^{nj/p}. \tag{6.2.63}$$

由(6.2.60) 和(6.2.63) 立即得到(6.2.48). 到此定理6.2.1 全部证完.

§6.3 NLS 和NLKG 方程

如本章前言指出, 色散半群和频率一致分解算子相结合, 能得到一些很好的性质. 这一节我们讨论这些性质. $e^{\mathrm{i}t\triangle}$ 在$M^s_{p,q}$的有界性由[10, 179]得到, 这里的简单证明属于[179], [179]考虑了半群 $G(t)=e^{(a+\mathrm{i})t\triangle}$ $(a>0)$ 在$M_{p,q}$的有界性, 证明对 $a=0$ 的情况也适用. 定理6.3.11 由 [9, 32] 得到. 其余都是本书第一作者和合作者得到.

§6.3.1 半群的基本估计

设$S(t)=e^{\mathrm{i}t\triangle}$ 表示Schrödinger 半群. 首先, 我们证明$\Box_k S(t): L^p\to L^p$为一致有界算子.

$$\begin{aligned}\|\Box_k S(t)f\|_p &\leqslant \sum_{|\ell|_\infty\leqslant 1}\|\mathscr{F}^{-1}\sigma_{k+\ell}e^{\mathrm{i}t|\xi|^2}\sigma_k\hat{f}\|_p\\ &\leqslant \sum_{|\ell|_\infty\leqslant 1}\|\mathscr{F}^{-1}(\sigma_{k+\ell}e^{\mathrm{i}t|\xi|^2})\|_1\|\Box_k f\|_p. \end{aligned}\tag{6.3.1}$$

因此, 只需要估计$\|\mathscr{F}^{-1}(\sigma_k e^{\mathrm{i}t|\xi|^2})\|_1$. 使用乘子估计,

$$\begin{aligned}\|\mathscr{F}^{-1}(\sigma_k e^{\mathrm{i}t|\xi|^2})\|_1 &= \|\mathscr{F}^{-1}(\sigma_0 e^{\mathrm{i}t|\xi|^2})\|_1\\ &\lesssim \|\sigma_0\|_2^{1-n/2L}\sum_{|\alpha|=L}\|D^\alpha(\sigma_0 e^{\mathrm{i}t|\xi|^2})\|_2^{n/2L}\\ &\lesssim (1+|t|^{n/2}). \end{aligned}\tag{6.3.2}$$

注意到

$$\|\Box_k S(t)f\|_2=\|\Box_k f\|_2. \tag{6.3.3}$$

由复插值, 立即得到

$$\|\Box_k S(t)f\|_p\lesssim (1+|t|)^{n|1/2-1/p|}\|\Box_k f\|_p. \tag{6.3.4}$$

命题6.3.1. 设$s\in\mathbb{R}$, $1\leqslant p\leqslant\infty$, $0<q<\infty$. 则有

$$\|S(t)f\|_{M^s_{p,q}}\lesssim (1+|t|)^{n|1/2-1/p|}\|f\|_{M^s_{p,q}}. \tag{6.3.5}$$

下面, 我们转而讨论衰减估计. 由第二章, $S(t)$ 满足下面的$L^p-L^{p'}$ 估计:

$$\|S(t)f\|_p\lesssim |t|^{-n(1/2-1/p)}\|f\|_{p'},\quad 2\leqslant p\leqslant\infty, \tag{6.3.6}$$

其中$1/p+1/p'=1$. 我们还有

$$\|\Box_k S(t)f\|_p \lesssim \sum_{|\ell|_\infty\leqslant 1} \|\Box_{k+\ell} f\|_{p'}, \quad 2\leqslant p\leqslant\infty, \tag{6.3.7}$$

事实上, 由Young 不等式和Hölder 不等式, 有

$$\begin{aligned}\|\Box_k S(t)f\|_p &\leqslant \sum_{\ell\in\Lambda} \|\mathscr{F}^{-1}\sigma_k\sigma_{k+\ell}\exp(-\mathrm{i}t|\xi|^2)\mathscr{F}f\|_p.\\ &\leqslant \sum_{\ell\in\Lambda}\|\sigma_{k+\ell}\exp(-\mathrm{i}t|\xi|^2)\sigma_k\mathscr{F}f\|_{p'} \lesssim \|\Box_k f\|_p.\end{aligned}$$

结合(6.3.6) 和(6.3.7),

$$\|\Box_k S(t)f\|_p \lesssim (1+|t|)^{-n(1/2-1/p)}\|\Box_k f\|_{p'}, \quad 2\leqslant p\leqslant\infty, \tag{6.3.8}$$

(6.3.8) 两端乘以$\langle k\rangle^s$, 然后求ℓ^q 范数, 有

$$\|S(t)f\|_{M^s_{p,q}} \lesssim (1+|t|)^{-n(1/2-1/p)}\|f\|_{M^s_{p',q}}.$$

命题6.3.2. 设$s\in\mathbb{R}$, $2\leqslant p<\infty$, $1/p+1/p'=1$, $0<q<\infty$. 则有

$$\|S(t)f\|_{M^s_{p,q}} \lesssim (1+|t|)^{-n(1/2-1/p)}\|f\|_{M^s_{p',q}}. \tag{6.3.9}$$

下面, 我们考虑和Klein-Gordon 方程的解有关的半群$G(t)=e^{\mathrm{i}t\omega^{1/2}}$, $\omega=I-\Delta$.

$$\begin{aligned}\|\Box_k G(t)f\|_p &\leqslant \sum_{|\ell|_\infty\leqslant 1}\|\mathscr{F}^{-1}\sigma_{k+\ell}e^{\mathrm{i}t\langle\xi\rangle}\sigma_k\hat{f}\|_p\\ &\leqslant \sum_{|\ell|_\infty\leqslant 1}\|\mathscr{F}^{-1}(\sigma_{k+\ell}e^{\mathrm{i}t\langle\xi\rangle})\|_1\|\Box_k f\|_p.\end{aligned} \tag{6.3.10}$$

因此, 只需要估计$\|\mathscr{F}^{-1}(\sigma_k e^{\mathrm{i}t\langle\xi\rangle})\|_1$. 使用乘子估计,

$$\begin{aligned}\|\mathscr{F}^{-1}(\sigma_k e^{\mathrm{i}t\langle\xi\rangle})\|_1 &= \|\mathscr{F}^{-1}(\sigma_0 e^{\mathrm{i}t\langle\xi+k\rangle})\|_1\\ &\lesssim \|\sigma_0\|_2^{1-n/2L}\sum_{|\alpha|=L}\|D^\alpha(\sigma_0 e^{\mathrm{i}t\langle\xi+k\rangle})\|_2^{n/2L}\\ &\lesssim (1+|t|^{n/2}).\end{aligned} \tag{6.3.11}$$

注意到

$$\|\Box_k G(t)f\|_2 = \|\Box_k f\|_2. \tag{6.3.12}$$

由复插值, 立即得到

$$\|\Box_k G(t)f\|_p \lesssim (1+|t|)^{n|1/2-1/p|}\|\Box_k f\|_p. \tag{6.3.13}$$

命题6.3.3. 设$s \in \mathbb{R}$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $0 < q < \infty$. 则有

$$\|G(t)f\|_{M^s_{p,q}} \lesssim (1+|t|)^{n|1/2-1/p|}\|f\|_{M^s_{p,q}}. \tag{6.3.14}$$

我们已经知道, $G(t)$ 满足 如下$L^p - L^{p'}$ 估计:

$$\|G(t)f\|_{H_p^{-2\sigma(p)}} \lesssim |t|^{-n(1/2-1/p)}\|f\|_{p'}, \tag{6.3.15}$$

其中

$$2 \leqslant p < \infty, \quad 2\sigma(p) = (n+2)\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right). \tag{6.3.16}$$

从(6.3.15) 得到

$$\|\Box_k G(t)f\|_{H_p^{-2\sigma(p)}} \lesssim |t|^{-n(1/2-1/p)}\|\Box_k f\|_{p'}. \tag{6.3.17}$$

使用乘子估计,

$$\|\Box_k (I-\triangle)^{\delta/2} g\|_p \lesssim \langle k\rangle^{\delta}\|g\|_p. \tag{6.3.18}$$

由(6.3.17) 和(6.3.18), 有

$$\begin{aligned}\|\Box_k G(t)f\|_p &\lesssim \langle k\rangle^{2\sigma(p)} \sum_{\ell\in\Lambda} \|\Box_{k+\ell} G(t)f\|_{H_p^{-2\sigma(p)}} \\ &\lesssim \langle k\rangle^{2\sigma(p)}|t|^{-n(1/2-1/p)} \sum_{\ell\in\Lambda} \|\Box_{k+\ell} f\|_{p'}.\end{aligned} \tag{6.3.19}$$

另一方面, 由Hölder 和Young 不等式,

$$\begin{aligned}\|\Box_k G(t)f\|_p &\lesssim \|\sigma_k e^{\mathrm{i}t(1+|\xi|^2)^{1/2}} \widehat{f}\|_{p'} \\ &\lesssim \sum_{\ell\in\Lambda} \|\sigma_k e^{\mathrm{i}t(1+|\xi|^2)^{1/2}} \mathscr{F}\Box_{k+\ell} f\|_{p'} \\ &\lesssim \sum_{\ell\in\Lambda} \|\mathscr{F}\Box_{k+\ell} f\|_{p} \\ &\lesssim \sum_{\ell\in\Lambda} \|\Box_{k+\ell} f\|_{p'}.\end{aligned} \tag{6.3.20}$$

从而, 对任何$\theta \in [0,1]$, 从(6.3.19) 和(6.3.20) 可以推出

$$\|\Box_k G(t)f\|_p \lesssim \langle k\rangle^{2\sigma(p)\theta}|t|^{-n\theta(1/2-1/p)} \sum_{\ell\in\Lambda} \|\Box_{k+\ell} f\|_{p'}. \tag{6.3.21}$$

注意$\sigma(p)\geqslant 0$, 由(6.3.20) 有

$$\|\Box_k G(t)f\|_p \lesssim \langle k\rangle^{2\sigma(p)\theta}\sum_{\ell\in\Lambda}\|\Box_{k+\ell}f\|_{p'}. \tag{6.3.22}$$

结合(6.3.21) 和(6.3.22), 我们得到

$$\|\Box_k G(t)f\|_p \lesssim \langle k\rangle^{2\sigma(p)\theta}(1+|t|)^{-n\theta(1/2-1/p)}\sum_{\ell\in\Lambda}\|\Box_{k+\ell}f\|_{p'}. \tag{6.3.23}$$

(6.3.23) 两端乘以$\langle k\rangle^s$ 然后取ℓ^q 范数, 立即得到

命题6.3.4. 设$s\in\mathbb{R}$, $2\leqslant p<\infty$, $1/p+1/p'=1$, $0<q<\infty$, $\theta\in[0,1]$, $\sigma(p)$ 由(6.3.16) 定义. 则有

$$\|G(t)f\|_{M^s_{p,q}} \lesssim (1+|t|)^{-n\theta(1/2-1/p)}\|f\|_{M^{s+2\sigma(p)\theta}_{p',q}}. \tag{6.3.24}$$

§6.3.2 模空间上的Strichartz估计

为了方便, 我们采用下面的记号:

$$\|f\|_{\ell^{s,q}_\Box(L^\gamma(I,L^p))} = \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}^n}\langle k\rangle^{sq}\|\Box_k f\|^q_{L^\gamma(I,L^p)}\right)^{1/q}, \tag{6.3.25}$$

$\ell^q_\Box(L^\gamma(I,L^p)) := \ell^{0,q}_\Box(L^\gamma(I,L^p))$, $\ell^q_\Box(L^p_{x,t\in I}) := \ell^q_\Box(L^p(I,L^p))$. 回忆上一节的估计, 可以抽象为下面的不等式:

$$\|U(t)f\|_{M^\alpha_{p,q}} \lesssim (1+|t|)^{-\delta}\|f\|_{M_{p',q}}, \tag{6.3.26}$$

其中$2\leqslant p<\infty$, $1\leqslant q<\infty$, $\alpha=\alpha(p)\in\mathbb{R}$, $\delta=\delta(p)>0$, α,δ 和$t\in\mathbb{R}$ 无关. 这里$U(t)$ 为某个色散半群:

$$U(t)=\mathscr{F}^{-1}e^{\mathrm{i}tP(\xi)}\mathscr{F}, \tag{6.3.27}$$

$P(\cdot):\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ 为某个实值函数. 本节在$U(t)$ 满足(6.3.26) 和(6.3.27) 的条件下, 推导 $U(t)$ 在模空间上的Strichartz估计.

总的来说, 前面§3.2的Strichartz估计对模空间上都对, 我们只要替换§3.2中的$X^*=M_{p',2}$, $X^\alpha=M^\alpha_{p,2}$. 但是, 我们不要忘记估计(6.3.26) 是一个在$t=0$时不含奇性的估计, 这导致模空间上的Strichartz估计没有限制条件$\delta\leqslant 1$, 从而要比§3.2的结果要好得多.

命题6.3.5. 设$U(t)$ 满足(6.3.26) 和(6.3.27). 对任何$\gamma \geqslant 2 \vee (2/\delta)$, 有

$$\|U(t)f\|_{\ell_{\square}^{\alpha/2,q}(L^{\gamma}(\mathbb{R},L^p))} \lesssim \|f\|_{M_{2,q}}. \tag{6.3.28}$$

此外, 若$\gamma \geqslant q$, 则有

$$\|U(t)f\|_{L^{\gamma}(\mathbb{R},M_{p,q}^{\alpha/2})} \lesssim \|f\|_{M_{2,q}}. \tag{6.3.29}$$

证明. 证明的想法和§3.2相同. 但是我们需要仔细处理指标α, p, q, γ. 首先, 考虑$1 < q < \infty$ 的情形. 我们来证明

$$\int_{\mathbb{R}} (U(t)f, \psi(t))dt \lesssim \|f\|_{M_{2,q}} \|\psi\|_{\ell_{\square}^{-\alpha/2,q'}(L^{\gamma'}(\mathbb{R},L^{p'}))} \tag{6.3.30}$$

对所有$f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, $\psi \in C_0^{\infty}(\mathbb{R}, \mathscr{S}(\mathbb{R}^n))$ 成立. 注意到$\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ 和 $C_0^{\infty}(\mathbb{R}, \mathscr{S}(\mathbb{R}^n))$ 分别在$M_{2,q}$ 和$\ell_{\square}^{-\alpha/2,q'}(L^{\gamma'}(\mathbb{R}, L^{p'}))$, 中稠密, (6.3.30) 蕴含(6.3.28). 由对偶性,

$$\int_{\mathbb{R}} (U(t)f, \psi(t))dt \lesssim \|f\|_{M_{2,q}} \left\| \int_{\mathbb{R}} U(-t)\psi(t)dt \right\|_{M_{2,q'}}. \tag{6.3.31}$$

对任何$k \in \mathbb{Z}^n$,

$$\begin{aligned} &\left\| \square_k \int_{\mathbb{R}} U(-t)\psi(t)dt \right\|_2^2 \\ &\lesssim \|\square_k \psi\|_{L^{\gamma'}(\mathbb{R},L^{p'})} \left\| \square_k \int_{\mathbb{R}} U(t-s)\psi(s)ds \right\|_{L^{\gamma}(\mathbb{R},L^p)}. \end{aligned} \tag{6.3.32}$$

因为$\{\square_k\}_{k\in\mathbb{Z}^n}$ 是几乎正交的, 由(6.3.26) 和$\|\cdot\|_{M_{p',q}}$ 的定义, 结合乘子估计, 便有

$$\begin{aligned} \|\square_k U(t)f\|_p &\lesssim \langle t\rangle^{-\delta} \langle k\rangle^{-\alpha} \sum_{|\ell|_\infty \leqslant 1} \|\square_k \square_{k+\ell} f\|_{M_{p',q}} \\ &\lesssim \langle t\rangle^{-\delta} \langle k\rangle^{-\alpha} \|\square_k f\|_{p'}, \end{aligned} \tag{6.3.33}$$

如果$\delta \neq 1$, 应用(6.3.33), 和Young 或Hardy-Littlewood-Sobolev 不等式可以得到[8]

$$\left\| \square_k \int_{\mathbb{R}} U(t-s)\psi(s)ds \right\|_{L^{\gamma}(\mathbb{R},L^p)} \lesssim \langle k\rangle^{-\alpha} \|\square_k \psi\|_{L^{\gamma'}(\mathbb{R},L^{p'})}. \tag{6.3.34}$$

[8]因为$\langle t-s\rangle^{-\delta} < |t-s|^{-\delta}$, 当$\delta < 1$, $\gamma = 2/\delta$时, 我们可以用Hardy-Littlewood-Sobolev 不等式.

若$\delta=1$, $\gamma>2$, 可以用Young 不等式得到(6.3.34) 成立. 若$\gamma=2$ 且 $\delta=1$, 可以用§2.3的方法得到(6.3.34). 因此由(6.3.32) 和(6.3.34), 我们有

$$\left\|\Box_k\int_{\mathbb{R}}U(-t)\psi(t)dt\right\|_2\lesssim\langle k\rangle^{-\alpha/2}\|\Box_k\psi\|_{L^{\gamma'}(\mathbb{R},L^{p'})}. \tag{6.3.35}$$

(6.3.35)两端求$\ell^{q'}$ 范数, 有

$$\left\|\int_{\mathbb{R}}U(-s)\psi(s)ds\right\|_{M_{2,q'}}\lesssim\|\psi\|_{\ell_{\Box}^{-\alpha/2,q'}(L^{\gamma'}(\mathbb{R},L^{p'}))}. \tag{6.3.36}$$

(6.3.31) 和(6.3.36) 蕴含(6.3.30).

若$\gamma\geqslant q$, 由Minkowski 不等式, 可见(6.3.29) 左端可被(6.3.28) 左端控制.

下面考虑$q=1$. 只要证

$$\int_{\mathbb{R}}(U(t)f,\psi(t))dt\lesssim\|f\|_{M_{2,q}}\|\psi\|_{c_{\Box}^{-\alpha/2}(L^{\gamma'}(\mathbb{R},L^{p'}))} \tag{6.3.37}$$

对$f\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ 和$\psi\in C_0^\infty(\mathbb{R},\mathscr{S}(\mathbb{R}^n))$ 成立. 重复上面的过程, 可以证明之. □

记

$$(\mathscr{U}f)(t)=\int_0^t U(t-s)f(s,\cdot)ds. \tag{6.3.38}$$

命题6.3.6. 设$U(t)$ 满足(6.3.26) 和(6.3.27). 对任何$\gamma\geqslant 2\vee(2/\delta)$, 我们有

$$\|\mathscr{U}f\|_{\ell_{\Box}^{q}(L^\infty(\mathbb{R},L^2))}\lesssim\|f\|_{\ell_{\Box}^{-\alpha/2,q}(L^{\gamma'}(\mathbb{R},L^{p'}))}. \tag{6.3.39}$$

另外, 若$\gamma'\leqslant q$, 则

$$\|\mathscr{U}f\|_{L^\infty(\mathbb{R},M_{2,q})}\lesssim\|f\|_{L^{\gamma'}(\mathbb{R},M_{p',q}^{-\alpha/2})}. \tag{6.3.40}$$

证明. 我们仅给出证明概要. 使用和(6.3.32), (6.3.34), (6.3.35), 一样的方法,

$$\|\Box_k\mathscr{U}f\|_2^2\lesssim\langle k\rangle^{-\alpha}\|\Box_k f\|^2_{L^{\gamma'}(\mathbb{R},L^{p'})}. \tag{6.3.41}$$

(6.3.41) 可以退出(6.3.39). 使用Minkowski 不等式, 从(6.3.39) 得到(6.3.40). □

命题6.3.7. 设$U(t)$ 满足(6.3.26) 和(6.3.27). 对任何$\gamma\geqslant 2\vee(2/\delta)$, 有

$$\|\mathscr{U}f\|_{\ell_{\Box}^{\alpha/2,q}(L^{\gamma}(\mathbb{R},L^{p}))}\lesssim\|f\|_{\ell_{\Box}^{-\alpha/2,q}(L^{\gamma'}(\mathbb{R},L^{p'}))}. \tag{6.3.42}$$

另外, 当$\delta=1$, $\gamma=2$时假设$q\leqslant 2$, 则对任何$\gamma\geqslant 2\vee(2/\delta)$, 有

$$\|\mathscr{U}f\|_{L^{\gamma}(\mathbb{R},M_{p,q}^{\alpha/2})}\lesssim\|f\|_{L^{\gamma'}(\mathbb{R},M_{p',q}^{-\alpha/2})}. \tag{6.3.43}$$

证明. 我们仅给出证明(6.3.43)的概要. 由(6.3.26), 可得到

$$\|\mathscr{U} f\|_{M_{p,q}^{\alpha/2}} \lesssim \int_0^t \langle t-s\rangle^{-\delta} \|f(s)\|_{M_{p',q}^{-\alpha/2}} ds. \tag{6.3.44}$$

若$\delta \neq 1$, 或$\delta = 1$ 且$\gamma > 2$, 可以使用和(6.3.34) 一样的方法得到结果. 当$\delta = 1$ 且$\gamma = 2$, 从(6.3.34) 和Minkowski 不等式得到(6.3.43) 成立. □

命题6.3.8. 设$U(t)$ 满足(6.3.26) 和(6.3.27), γ 满足$\gamma \geqslant \max(2/\delta, 2)$. 则有

$$\|\mathscr{U} f\|_{\ell_\square^{\alpha/2,q}(L^\gamma(\mathbb{R},L^p))} \lesssim \|f\|_{\ell_\square^q(L^1(\mathbb{R},L^2))}. \tag{6.3.45}$$

另外, 若$\gamma \geqslant q$, 则

$$\|\mathscr{U} f\|_{L^\gamma(\mathbb{R},M_{p,q}^{\alpha/2})} \lesssim \|f\|_{L^1(\mathbb{R},M_{2,q})}. \tag{6.3.46}$$

证明. 假设$f, \psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}, \mathscr{S}(\mathbb{R}^n))$. 由命题6.3.6, 得到

$$\begin{aligned}
&\left|\int_{\mathbb{R}_+} \left(\int_0^t U(t-\tau)f(\tau)d\tau, \psi(t)\right) dt\right| \\
&\lesssim \|f\|_{L^1(\mathbb{R},M_{2,q})} \left\|\int_\cdot^\infty U(\cdot - t)\psi(t)dt\right\|_{L^\infty(\mathbb{R},M_{2,q'})} \\
&\lesssim \|f\|_{L^1(\mathbb{R},M_{2,q})} \|\psi\|_{\ell_\square^{-\alpha/2,q'}(L^{\gamma'}(\mathbb{R},L^{p'}))}.
\end{aligned} \tag{6.3.47}$$

因为$\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}, \mathscr{S}(\mathbb{R}^n))$ 在$\ell_\square^{-\alpha/2,q'}(L^{\gamma'}(\mathbb{R}, L^{p'}))$ 和$c_\square^{-\alpha/2}(L^{\gamma'}(\mathbb{R}, L^{p'}))$ 稠密, 由对偶性, 我们得到结果. □

Schrödinger 半群对应$\alpha = 0$, $\delta = n(1/2 - 1/p)$, $2 \leqslant p < \infty$. 在命题6.3.5–6.3.7 中取$q = 1$, 有

推论6.3.9. 设$2 \leqslant p < \infty$, $\gamma \geqslant 2 \vee \gamma(p)$,

$$\frac{2}{\gamma(p)} = n\Big(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\Big). \tag{6.3.48}$$

设$S(t) = e^{\mathrm{i}t\Delta}$, $\mathscr{A} = \int_0^t S(t-s)\cdot ds$. 则有

$$\|S(t)\varphi\|_{\ell_\square^1(L^\gamma(\mathbb{R},L^p))} \lesssim \|\varphi\|_{M_{2,1}}, \tag{6.3.49}$$

$$\|\mathscr{A} f\|_{\ell_\square^1(L^\gamma(\mathbb{R},L^p))\cap \ell_\square^1(L^\infty(\mathbb{R},L^2))} \lesssim \|f\|_{\ell_\square^1(L^{\gamma'}(\mathbb{R},L^{p'}))}, \tag{6.3.50}$$

推论6.3.10. 设$2 \leqslant p < \infty$, $\theta \in (0,1]$, $1 \leqslant q < \infty$,

$$\frac{2}{\gamma_\theta(p)} = n\theta\Big(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\Big), \quad 2\sigma = (n+2)\theta\Big(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\Big). \tag{6.3.51}$$

设$G(t)$ 由(6.3.15) 定义, $\mathscr{G} = \int_0^t G(t-s)\cdot ds$. 则对任何$\gamma \geqslant 2 \vee \gamma_\theta(p)$, 有

$$\|G(t)\varphi\|_{\ell_\square^{-\sigma,q}(L^\gamma(\mathbb{R},L^p))} \lesssim \|\varphi\|_{M_{2,q}}, \tag{6.3.52}$$

$$\|\mathscr{G}f\|_{\ell_\square^{-\sigma,q}(L^\gamma(\mathbb{R},L^p))\cap \ell_\square^q(L^\infty(\mathbb{R},L^2))} \lesssim \|f\|_{\ell_\square^{\sigma,q}(L^{\gamma'}(\mathbb{R},L^{p'}))}. \tag{6.3.53}$$

§6.3.3 NLS和NLKG的适定性

我们考虑NLS方程的初值问题:

$$\mathrm{i}u_t + \Delta u = f(u), \quad u(0,x) = u_0(x), \tag{6.3.54}$$

注意到$B^n_{\infty,1} \subset M_{\infty,1} \subset B^0_{\infty,1}$ 为最佳嵌入, 并且到目前为止, 我们无法实现NLS方程在$B^s_{\infty,1}$的适定性. 但是我们可以实现NLS方程在$M_{\infty,1}$的局部适定性. 我们有下面的结论(见[9, 32]).

定理 6.3.11. 设$n \geqslant 1$, $f(u) = \lambda|u|^\kappa u$, $\kappa \in 2\mathbb{N}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $u_0 \in M_{p,1}$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$. 则存在$T > 0$, 使得(6.3.54) 有唯一解$u \in C([0,T), M_{p,1})$. 且若$T < \infty$, 则$\limsup_{t\nearrow T} \|u(t)\|_{M_{p,1}} = \infty$.

当非线性项为指数函数时, 结论也对. 注意到$B^{n/2}_{2,1} \subset M_{2,1} \subset B^0_{2,1} \cap C(\mathbb{R}^n)$ 也为最佳嵌入, 我们可以得到NLS方程在$M_{2,1}$的小初值整体适定性.

定理 6.3.12. 设$n \geqslant 1$, $f(u) = \lambda|u|^\kappa u$, $\kappa \in 2\mathbb{N}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $\kappa \geqslant 4/n$, $u_0 \in M_{2,1}$ 且存在适当小的$\delta > 0$ 使得$\|u_0\|_{M_{2,1}} \leqslant \delta$. 则(6.3.54) 有唯一解

$$u \in C(\mathbb{R}, M_{2,1}) \cap \ell^1_\square(L^p_{x,t\in\mathbb{R}}), \tag{6.3.55}$$

其中$p \in [2+4/n,\, 2+\kappa] \cap \mathbb{N}$, $\ell^1_\square(L^p_{x,t\in\mathbb{R}})$ 由 (6.3.25) 定义.

定理 6.3.13. 设$n \geqslant 2$, $f(u) = \lambda(e^{\varrho|u|^2} - 1)u$, $\lambda \in \mathbb{C}$, $\varrho > 0$. 假定$u_0 \in M_{2,1}$ 且存在适当小的$\delta > 0$ 使得$\|u_0\|_{M_{2,1}} \leqslant \delta$. 则(6.3.54) 有唯一解

$$u \in C(\mathbb{R}, M_{2,1}) \cap \ell^1_\square(L^4_{x,t\in\mathbb{R}}). \tag{6.3.56}$$

定理6.3.11的证明依赖于$M_{p,1}$ 的代数结构.

引理6.3.14. 设$1 \leqslant p \leqslant \infty$, 则有$M_{p,1}$ 为Banach 代数.

引理6.3.14的证明类似于Navier-Stokes方程一章中$E^s_{2,1}$ 的代数结构, 从略.

定理6.3.11的证明. 记

$$\mathscr{A} f(t,x) = \int_0^t S(t-\tau) f(\tau,x) d\tau.$$

考虑映射

$$\mathscr{T} : u(t) \to S(t)u_0 - \mathrm{i}\mathscr{A} f(u). \tag{6.3.57}$$

我们记

$$\mathcal{D} = \{u : \|u\|_{C([0,T]:M_{p,1})} \leqslant M\}, \quad d(u,v) = \|u-v\|_{C([0,T]:M_{p,1})},$$

其中$M = 2C\|u_0\|_{M_{p,1}}$. 若$u \in \mathcal{D}$, 由命题6.3.1 和$M_{p,1}$的代数结构,

$$\|\mathscr{T} u\|_{C([0,T]:M_{p,1})} \lesssim (1+T)^{n/2}[\|u_0\|_{M_{p,1}} + T\|u\|^{\kappa+1}_{C([0,T]:M_{p,1})}]. \tag{6.3.58}$$

可以选到适当小的$0 < T < 1$ 使得$CTM^{\kappa} \leqslant 1/2$. 由此得到$\mathscr{T} : (\mathcal{D}, d) \to (\mathcal{D}, d)$ 为压缩映射. 其余证明是标准的, 从略. □

引理6.3.15. 设$1 \leqslant p, p_i, \gamma, \gamma_i \leqslant \infty$ 满足

$$\frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} + \ldots + \frac{1}{p_N}, \quad \frac{1}{\gamma} = \frac{1}{\gamma_1} + \ldots + \frac{1}{\gamma_N}. \tag{6.3.59}$$

则有

$$\|u_1 u_2 \ldots u_N\|_{\ell^1_\square(L^\gamma(\mathbb{R}, L^p))} \leqslant C^N \prod_{i=1}^N \|u_i\|_{\ell^1_\square(L^{\gamma_i}(\mathbb{R}, L^{p_i}))}, \tag{6.3.60}$$

证明. 只要考虑$N = 2$ 的情形. 我们有

$$\| \square_k (u_1 u_2)\|_p \leqslant \sum_{i,j \in \mathbb{Z}^n} \|\square_k (\square_i u_1 \, \square_j u_2)\|_p. \tag{6.3.61}$$

注意到当$|k-i-j| \geqslant k_0(n)$, $\square_k(\square_i u_1 \, \square_j u_2) = 0$, 其中$k_0(n)$ 表示只依赖于n 的常数, 从(6.3.61) 得到

$$\| \square_k (u_1 u_2)\|_p \leqslant \sum_{i,j \in \mathbb{Z}^n} \|\square_k (\square_i u_1 \, \square_j u_2)\|_p \chi_{|k-i-j| \leqslant k_0(n)}. \tag{6.3.62}$$

应用Bernstein 估计和Hölder 不等式, (6.3.62) 蕴含

$$\| \Box_k(u_1u_2)\|_p \leqslant \sum_{i,j\in\mathbb{Z}^n} \| \Box_i u_1\|_{p_1} \| \Box_j u_2\|_{p_2} \chi_{|k-i-j|\leqslant k_0(n)}. \tag{6.3.63}$$

因此, 由(6.3.63), Hölder 和Minkowski 不等式, 我们得到

$$\begin{aligned}
&\|u_1u_2\|_{\ell^1_\Box(L^\gamma(\mathbb{R},L^p))}\\
&\lesssim \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left(\int_{\mathbb{R}} \left(\sum_{i,j\in\mathbb{Z}^n} \| \Box_i u_1(t)\|_{p_1} \| \Box_j u_2(t)\|_{p_2} \chi_{|k-i-j|\leqslant k_0(n)} \right)^\gamma dt \right)^{1/\gamma}\\
&\lesssim \sum_{k\in\mathbb{Z}} \sum_{i,j\in\mathbb{Z}^n} \| \Box_i u_1(t)\|_{L^{\gamma_1}(\mathbb{R},L^{p_1})} \| \Box_j u_2(t)\|_{L^{\gamma_2}(\mathbb{R},L^{p_2})} \chi_{|k-i-j|\leqslant k_0(n)}.
\end{aligned} \tag{6.3.64}$$

使用Young 不等式, 由(6.3.64) 可推出

$$\|u_1u_2\|_{\ell^1_\Box(L^\gamma(\mathbb{R},L^p))} \lesssim \|u_1\|_{\ell^1_\Box(L^{\gamma_1}(\mathbb{R},L^{p_1}))} \|u_2\|_{\ell^1_\Box(L^{\gamma_2}(\mathbb{R},L^{p_2}))}. \tag{6.3.65}$$

使用归纳法和(6.3.65), 我们可以得到想要的结果. □

选取$p\in\mathbb{N}$, $p\in[2+4/n, 2+\kappa]$,

$$X = \ell^1_\Box(L^\infty(\mathbb{R},L^2)) \cap \ell^1_\Box(L^p(\mathbb{R},L^p)), \tag{6.3.66}$$

易见

$$\frac{2}{p} \leqslant n\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p}\right) = \frac{n(p-2)}{2p} \tag{6.3.67}$$

且(6.3.67)中等号成立当且仅当$p=2+4/n$.使用推论6.3.9,

$$\|S(t)u_0\|_X \lesssim \|u_0\|_{M_{2,1}}, \tag{6.3.68}$$

$$\|\mathscr{A} f\|_X \lesssim \|f(u)\|_{\ell^1_\Box(L^{p'}_{x,t\in\mathbb{R}})}. \tag{6.3.69}$$

定理6.3.12 的证明. 设X 由(6.3.66) 定义, $\mathscr{T}$由(6.3.57)定义. 由(6.3.68) 和(6.3.69),

$$\|\mathscr{T}u\|_X \lesssim \|u_0\|_{M_{2,1}} + \|f(u)\|_{\ell^1_\Box(L^{p'}_{x,t\in\mathbb{R}})}. \tag{6.3.70}$$

因为$p\in[2+4/n, 2+\kappa]$, 我们有

$$\frac{1}{p'} = \frac{p-1}{p} + \frac{\kappa+2-p}{\infty}. \tag{6.3.71}$$

由以引理6.3.15,

$$\left\|\pi(u^{1+\kappa})\right\|_{\ell^1_\square(L^{p'}_{x,t\in\mathbb{R}})} \lesssim \|u\|^{p-1}_{\ell^1_\square(L^p_{x,t\in\mathbb{R}})}\|u\|^{2+\kappa-p}_{\ell^1_\square(L^\infty_{x,t\in\mathbb{R}})}. \tag{6.3.72}$$

因为

$$\|\square_i u\|_\infty \lesssim \|\square_i u\|_2, \quad i\in\mathbb{Z}^n, \tag{6.3.73}$$

由(6.3.72) 和(6.3.73), 我们有,

$$\left\|\pi(u^{1+\kappa})\right\|_{\ell^1_\square(L^{p'}_{x,t\in\mathbb{R}})} \lesssim \|u\|^{1+\kappa}_X. \tag{6.3.74}$$

从(6.3.70) 和(6.3.74) 导出

$$\|\mathscr{T}u\|_X \lesssim \|u_0\|_{M_{2,1}} + \|u\|^{1+\kappa}_X. \tag{6.3.75}$$

取

$$\mathcal{D}=\{u:\ \|u\|_X\leqslant M\},\quad d(u,v)=\|u-v\|_X, \tag{6.3.76}$$

我们看到, 若$M>0$ 适当小, $\|u_0\|_{M_{2,1}}\lesssim M/2$, 则$\mathscr{T}:(\mathcal{D},d)\to(\mathcal{D},d)$ 为压缩映射, 这导致(6.3.54) 有解$u\in X$. 其余证明略. □

定理6.3.13 的证明基本上平行于定理6.3.12. 设

$$Y=\ell^1_\square(L^\infty(\mathbb{R},L^2))\cap\ell^1_\square(L^4_{x,t\in\mathbb{R}}). \tag{6.3.77}$$

则有

$$\|\mathscr{T}u\|_Y \lesssim \|u_0\|_{M_{2,1}} + \sum_{k=1}^\infty \frac{\varrho^k}{k!}\||u|^{2k}u\|_{\ell^1_\square(L^{4/3}_{x,t\in\mathbb{R}})}. \tag{6.3.78}$$

使用引理6.3.15,

$$\left\|u^{1+2k}\right\|_{\ell^1_\square(L^{4/3}_{x,t\in\mathbb{R}})} \lesssim C^{2k+1}\|u\|^3_{\ell^1_\square(L^4_{x,t\in\mathbb{R}})}\|u\|^{2k-2}_{\ell^1_\square(L^\infty_{x,t\in\mathbb{R}})} \lesssim C^{2k+1}\|u\|^{2k+1}_Y. \tag{6.3.79}$$

因此,

$$\|\mathscr{T}u\|_Y \lesssim \|u_0\|_{M_{2,1}} + \sum_{k=1}^\infty \frac{C^{2k+1}}{k!}\|u\|^{2k+1}_Y. \tag{6.3.80}$$

使用(6.3.80), 并结合上述定理6.3.12的证明, 可以得到定理6.3.13.

关于非线性Klein-Gordon方程,

$$u_{tt}+(I-\Delta)u+f(u)=0,\quad u(0)=u_0,\ u_t(0)=u_1, \tag{6.3.81}$$

按照平行于NLS方程的想法, 我们可以证明下面的结果:

定理 6.3.16. 设$n \geqslant 1$, $f(u)=\lambda|u|^\kappa u$, $\kappa \in 2\mathbb{N}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $(u_0,u_1) \in M_{p,1} \times M_{p,1}^{-1}$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$. 则存在$T>0$, 使得(6.3.54) 有唯一解$(u,u_t) \in C([0,T),M_{p,1}) \times C([0,T),M_{p,1}^{-1})$. 且若$T<\infty$, 则$\limsup_{t\nearrow T}(\|u(t)\|_{M_{p,1}} + \|u_t(t)\|_{M_{p,1}^{-1}}) = \infty$.

当非线性项为指数函数时, 结论也对. 结论的证明只需要使用引理6.3.3. 使用Strichartz估计, 类似NLS方程, 可以证明

定理 6.3.17. 设$n \geqslant 1$, $f(u)=\pi(u^{1+\kappa})$, $\kappa \in \mathbb{N}$, $\kappa \geqslant 4/n$. 置

$$\sigma = \frac{n+2}{n(2+\kappa)}. \tag{6.3.82}$$

假设$(u_0,u_1) \in M_{2,1}^\sigma \times M_{2,1}^{\sigma-1}$ 且存在适当小的$\delta>0$ 使得$\|u_0\|_{M_{2,1}^\sigma}+\|u_1\|_{M_{2,1}^{\sigma-1}} \leqslant \delta$. 则(6.3.81) 有唯一解

$$u \in C(\mathbb{R},M_{2,1}^\sigma) \cap \ell_\square^1(L_{x,t\in\mathbb{R}}^{2+\kappa}). \tag{6.3.83}$$

定理 6.3.18. 设$n \geqslant 2$, $f(u)=\sinh u - u$, $\sigma=(n+2)/4n$. 假设$(u_0,u_1) \in M_{2,1}^\sigma \times M_{2,1}^{\sigma-1}$ 且存在适当小的$\delta>0$ 满足$\|u_0\|_{M_{2,1}^\sigma}+\|u_1\|_{M_{2,1}^{\sigma-1}} \leqslant \delta$. 则(6.3.81) 有唯一解

$$u \in C(\mathbb{R},M_{2,1}^\sigma) \cap \ell_\square^1(L_{x,t\in\mathbb{R}}^{4}). \tag{6.3.84}$$

§6.4 导数非线性Schrödinger 方程

§6.4.1 方程模型和研究方法简介

我们研究下面的导数非线性Schrödinger方程(gNLS)

$$\mathrm{i}u_t + \Delta_\pm u = F(u,\bar{u},\nabla u,\nabla\bar{u}), \quad u(0,x)=u_0(x), \tag{6.4.1}$$

其中u 为$(t,x) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ 的复值函数,

$$\Delta_\pm u = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i \partial_{x_i}^2, \quad \varepsilon_i \in \{1,-1\}, \quad i=1,...,n, \tag{6.4.2}$$

$\nabla=(\partial_{x_1},...,\partial_{x_n})$, $F:\mathbb{C}^{2n+2}\to\mathbb{C}$ 为一个多项式级数,

$$F(z)=F(z_1,...,z_{2n+2}) = \sum_{m+1\leqslant|\beta|<\infty} c_\beta z^\beta, \quad c_\beta \in \mathbb{C}, \tag{6.4.3}$$

$2 \leqslant m < \infty$, $m \in \mathbb{N}$, $\sup_\beta |c_\beta| < \infty$[9]. 典型的非线性项是下面的

$$F(u, \bar{u}, \nabla u, \nabla \bar{u}) = |u|^2 \vec{\lambda} \cdot \nabla u + u^2 \vec{\mu} \cdot \nabla \bar{u} + |u|^2 u,$$

这种模型的物理背景可见[160, 38, 27]. 另一种模型为

$$F(u, \bar{u}, \nabla u, \nabla \bar{u}) = (1 \mp |u|^2)^{-1} (\nabla u)^2 \bar{u} = \sum_{k=0}^{\infty} (\pm 1)^k |u|^{2k} (\nabla u)^2 \bar{u}, \quad |u| < 1,$$

这是Schrödinger流的一种变形[37], 也和铁磁链方程组有关[68, 185]. 非椭圆的导数非线性Schrödinger方程也是有物理背景的, 比如在水波问题、高维完全可积models 等, 见[183, 184, 1, 100]. 关于导数Schrödinger方程近年来得到系列研究, 见[68, 76, 78, 83, 85, 86, 92, 93, 126, 138].

研究gNLS方程, 由于Strichartz不等式两端的导数正则性相同, 因此, 仅用Strichartz 估计无法做出gNLS方程的整体适定性. 我们需要其它技巧处理非线性项中含有导数的项. 到目前为止, 有三种方法被发现. 一种是使用标准的能量估计来处理非线性项中的导数; 另一种是使用Bourgain类空间$X^{s,b}$吸收非线性项中的导数; 第三种技巧是直接使用Schrödinger 群的光滑效应处理非线性项中的导数. 当然, 这些方法不完全是孤立的, 它们之间有联系.

对一维空间和高维空间椭圆型的gNLS, 能量方法可以得到适当小初值的整体存在唯一性结果, 近二十多年来一直有新的结果出现, 见[92, 93, 138, 126]. 对非椭圆型的gNLS, Kenig, Ponce 和Vega 使用光滑效应方法, 得到很光滑的大初值的局部解的适定性, 见[78, 83]. 最近, 本书第一作者和合作者做出非椭圆型的gNLS的小初值整体适定性和散射算子的存在性, 见[175].

能量方法的局限性在于对非线性项的结构要求比较苛刻, 或者要求初始值的衰减性、解析性; 能量方法的优势是比较简单. $X^{s,b}$对一维空间的适定性处理非常有效, 对高维空间变得很困难; 另一方面, 对高维非椭圆的gNLS, $X^{s,b}$方法看来更加困难, 目前尚未有发现有人用此方法做出结果; $X^{s,b}$ 方法的优势是能降低初值的正则性. 到目前为止, 散射算子的存在性无法用能量估计和$X^{s,b}$做出.

本书使用光滑效应估计和频率空间一致分解方法相结合, 我们证明gNLS方程在模空间的小初值整体适定性以及散射算子的存在性, 结果也包含了非椭圆情形的适定性和散射算子的存在性.

为了便于读者理解, 我们先交待基本想法. 记

$$S(t) = e^{\mathrm{i}t\Delta_\pm} = \mathscr{F}^{-1} e^{\mathrm{i}t \sum_{j=1}^n \varepsilon_j \xi_j^2} \mathscr{F}, \quad \mathscr{A} f(t,x) = \int_0^t S(t-\tau) f(\tau, x) d\tau.$$

[9] 事实上, 我们只需要$|c_\beta| \leqslant C^{|\beta|}$.

为了说明想法, 我们把非线性项简化为$F(u,\bar u,\nabla u,\nabla\bar u)=\vec\lambda\cdot\nabla(|u|^2u)$. 按照第三章引言, 我们需要解积分方程

$$u(t)=S(t)u_0-\mathrm{i}\mathscr{A}\vec\lambda\cdot\nabla(|u|^2u).$$

基于一维Schrödinger群的光滑效应估计, 我们很容易证明下面的高维光滑效应估计:

$$\left\|D_{x_i}^{1/2}S(t)u_0\right\|_{L^\infty_{x_i}L^2_{(x_j)_{j\neq i}}L^2_t(\mathbb{R}^{1+n})}\lesssim\|u_0\|_2,\tag{6.4.4}$$

$$\|\partial_{x_i}\mathscr{A}f\|_{L^\infty_{x_i}L^2_{(x_j)_{j\neq i}}L^2_t(\mathbb{R}^{1+n})}\lesssim\|f\|_{L^1_{x_i}L^2_{(x_j)_{j\neq i}}L^2_t},\tag{6.4.5}$$

其中各向异性的Lebesgue空间定义为 (以下总假定各向异性的Lebesgue空间定义在$\mathbb{R}^{1+n}$上)

$$\|f\|_{L^{p_1}_{x_i}L^{p_2}_{(x_j)_{j\neq i}}L^{p_2}_t}=\left\|\|f\|_{L^{p_2}_{x_1,\dots,x_{i-1},x_{i+1},\dots,x_n}L^{p_2}_t(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^{n-1})}\right\|_{L^{p_1}_{x_i}(\mathbb{R})}.\tag{6.4.6}$$

按照scaling不变性, 这两个估计最佳. 根据(6.4.19), 应选取$L^\infty_{x_i}L^2_{(x_j)_{j\neq i}}L^2_t$作为工作空间处理非线性项的导数$\partial_{x_i}$. 按照积分方程, 有

$$\|\partial_{x_1}u\|_{L^\infty_{x_1}L^2_{(x_j)_{j\neq 1}}L^2_t}\lesssim\|D^{1/2}_{x_1}u_0\|_2+\sum_{i=1}^n\|\partial_{x_i}(|u|^2u)\|_{L^1_{x_1}L^2_{(x_j)_{j\neq 1}}L^2_t}.\tag{6.4.7}$$

现在需要做非线性估计. 本质上, 需要处理下面两种非线性估计:

$$I=\|\partial_{x_1}(|u|^2u)\|_{L^1_{x_1}L^2_{(x_j)_{j\neq 1}}L^2_t(\mathbb{R}^{1+n})},\quad II=\|\partial_{x_2}(|u|^2u)\|_{L^1_{x_1}L^2_{(x_j)_{j\neq 1}}L^2_t}.$$

先看I的估计. 使用Hölder不等式, 有

$$I\leqslant\|\partial_{x_1}u\|_{L^\infty_{x_1}L^2_{(x_j)_{j\neq 1}}L^2_t}\|u\|^2_{L^2_{x_1}L^\infty_{(x_j)_{j\neq 1}}L^\infty_t}.\tag{6.4.8}$$

所以, 我们还需要估计$\|u\|_{L^2_{x_1}L^\infty_{(x_j)_{j\neq 1}}L^\infty_t}$. 按照积分方程, 需要估计

$$\|u\|_{L^2_{x_1}L^\infty_{(x_j)_{j\neq 1}}L^\infty_t}\leqslant\|S(t)u_0\|_{L^2_{x_1}L^\infty_{(x_j)_{j\neq 1}}L^\infty_t}+\|\nabla\mathscr{A}(|u|^2u)\|_{L^2_{x_1}L^\infty_{(x_j)_{j\neq 1}}L^\infty_t}.$$

遗憾的是, 我们不能直接做出整体估计, 但可以得到$\|S(t)u_0\|_{L^2_{x_1}L^\infty_{(x_j)_{j\neq 1}}L^\infty_t}$的频率局部化估计:

$$\|\Box_kS(t)u_0\|_{L^2_{x_1}L^\infty_{(x_j)_{j\neq 1}}L^\infty_t}\lesssim\langle k_1\rangle^{1/2}\|\Box_ku_0\|_2.\tag{6.4.9}$$

由于(6.4.9)只是一个局部估计, 这使得我们需要频率局部化上面的讨论. 从而, 我们需要局部化(6.4.7), 引进下面的:

$$\|u\|_{\ell^{1,s}_{\square_{hi}}(L^\infty_{x_1}L^2_{(x_j)_{j\neq 1}}L^2_t)} := \sum_{k\in\mathbb{Z}^n,\ |k_1|>4} \langle k_1\rangle^s \|\square_k u\|_{L^\infty_{x_1}L^2_{(x_j)_{j\neq 1}}L^2_t}, \tag{6.4.10}$$

$$\|u\|_{\ell^1_\square(L^2_{x_1}L^\infty_{(x_j)_{j\neq 1}}L^\infty_t)} := \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \|\square_k u\|_{L^2_{x_1}L^\infty_{(x_j)_{j\neq 1}}L^\infty_t}. \tag{6.4.11}$$

注意到光滑效应估计中低频部分估计还不如Strichartz估计好, 所以在(6.4.10)中我们去掉了ξ_1方向的低频部分. 如果我们不考虑最优的估计, 上面的(6.4.9)估计已蕴含了

$$\|u\|_{\ell^1_\square(L^2_{x_1}L^\infty_{(x_j)_{j\neq 1}}L^\infty_t)} \lesssim \|u\|_{M^{1/2}_{2,1}} + \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \langle k_1\rangle^{1/2} \|\square_k \nabla(|u|^2 u)\|_{L^1_t L^2_x}.$$

做非线性估计,

$$\|u\|_{\ell^1_\square(L^2_{x_1}L^\infty_{(x_j)_{j\neq 1}}L^\infty_t)} \lesssim \|u\|_{M^{1/2}_{2,1}} + \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \langle k\rangle^{3/2} \|\square_k u\|_{L^3_t L^6_x}\right)^3. \tag{6.4.12}$$

这意味着我们还需要下面的范数:

$$\|u\|_{\ell^{1,3/2}_\square(L^3_t L^6_x)} := \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \langle k\rangle^{3/2} \|\square_k u\|_{L^3_t L^6_x}. \tag{6.4.13}$$

(6.4.7)的局部化形式为

$$\|\partial_{x_1} u\|_{\ell^{1,2}_{\square_{hi}}(L^\infty_{x_1}L^2_{(x_j)_{j\neq 1}}L^2_t)} \lesssim \|u_0\|_{M^{5/2}_{2,1}} + \sum_{i=1}^n \langle k_1\rangle^2 \|\square_k \partial_{x_i}(|u|^2 u)\|_{L^1_{x_1}L^2_{(x_j)_{j\neq 1}}L^2_t}. \tag{6.4.14}$$

通过做非线性估计, 我们发现(6.4.14)右端可以被(6.4.10), (6.4.11) 和(6.4.13)所控制. II 的估计更复杂一些, 我们需要考虑导数∂_{x_2}和空间$\ell^{1,2}_{\square_{hi}}(L^\infty_{x_1}L^2_{(x_j)_{j\neq 1}}L^2_t)$的相互作用, 详细可见下面§6.4.5的讨论.

§6.4.2 gNLS的整体适定性和散射结果

回忆各向异性Lebesgue空间$L^{p_1}_{x_i}L^{p_2}_{(x_j)_{j\neq i}}L^{p_2}_t$ 由(6.4.6) 定义. 对$k=(k_1,...,k_n)$, 我们记

$$\|u\|_{X^s_\alpha} = \sum_{i,\ell=1}^n \sum_{k\in\mathbb{Z}^n,\ |k_i|>4} \langle k_i\rangle^{s-1/2} \left\|\partial^\alpha_{x_\ell}\square_k u\right\|_{L^\infty_{x_i}L^2_{(x_j)_{j\neq i}}L^2_t}$$

$$+\sum_{i,\ell=1}^{n}\sum_{k\in\mathbb{Z}^n}\left\|\partial_{x_\ell}^{\alpha}\Box_k u\right\|_{L^m_{x_i}L^\infty_{(x_j)_{j\neq i}}L^\infty_t}, \tag{6.4.15}$$

$$\|u\|_{S^s_\alpha}=\sum_{\ell=1}^{n}\sum_{k\in\mathbb{Z}^n}\langle k\rangle^{s-1}\left\|\partial_{x_\ell}^{\alpha}\Box_k u\right\|_{L^\infty_t L^2_x\bigcap L^3_t L^6_x}, \tag{6.4.16}$$

$$\|u\|_{X^s}=\sum_{\alpha=0,1}\|u\|_{X^s_\alpha},\quad \|u\|_{S^s}=\sum_{\alpha=0,1}\|u\|_{S^s_\alpha}. \tag{6.4.17}$$

定理 6.4.1. 设$n\geqslant 3$, $m=2$, $u_0\in M^{5/2}_{2,1}$ 且存在适当小的$\delta>0$, 使得$\|u_0\|_{M^{5/2}_{2,1}}\leqslant\delta$. 则(6.4.1) 有唯一解$u\in C(\mathbb{R},M^{5/2}_{2,1})\cap X^{5/2}\cap S^{5/2}$, $\|u\|_{X^{5/2}\cap S^{5/2}}\lesssim\delta$. 进一步, (6.4.1) 的散射算子把$C(\mathbb{R},M^{5/2}_{2,1})$ 中的某个零邻域映射到$C(\mathbb{R},M^{5/2}_{2,1})$.

§6.4.3 各向异性的线性估计

命题6.4.2. (光滑效应) 对任何$i=1,...,n$, 有下面的估计:

$$\left\|D^{1/2}_{x_i}S(t)u_0\right\|_{L^\infty_{x_i}L^2_{(x_j)_{j\neq i}}L^2_t}\lesssim\|u_0\|_2. \tag{6.4.18}$$

$$\|\partial_{x_i}\mathscr{A}f\|_{L^\infty_{x_i}L^2_{(x_j)_{j\neq i}}L^2_t}\lesssim\|f\|_{L^1_{x_i}L^2_{(x_j)_{j\neq i}}L^2_t}. \tag{6.4.19}$$

$$\|\partial_{x_i}\mathscr{A}f\|_{L^\infty_t L^2_x}\lesssim\|D^{1/2}_{x_i}f\|_{L^1_{x_i}L^2_{(x_j)_{j\neq i}}L^2_t}. \tag{6.4.20}$$

证明. 由标准的对偶估计, (6.4.18) 蕴含(6.4.20). 所以, 我们只需证明前两个不等式. 记$\bar{x}=(x_2,...,x_n)$. 使用Plancherel 等式和Minkowski 不等式,

$$\|S(t)u_0\|_{L^\infty_{x_1}L^2_{\bar{x}}L^2_t}\leqslant\left\|\mathscr{F}^{-1}_{\xi_1}e^{\mathrm{i}t\varepsilon_1\xi_1^2}\mathscr{F}_{x_1}(\mathscr{F}_{\bar{x}}u_0)\right\|_{L^2_{\bar{\xi}}L^\infty_{x_1}L^2_t}. \tag{6.4.21}$$

回忆$S(t)$ 在一维空间的光滑效应估计,

$$\left\|\mathscr{F}^{-1}_{\xi}e^{\mathrm{i}t\xi^2}\mathscr{F}_x u_0\right\|_{L^\infty_x L^2_t(\mathbb{R}^{1+1})}\lesssim\|D^{-1/2}_x u_0\|_{L^2(\mathbb{R})}. \tag{6.4.22}$$

从而, (6.4.21) 和(6.4.22), 结合使用Plancherel等式, 立即得到(6.4.18).

记

$$u=c\mathscr{F}^{-1}_{t,x}\frac{\xi_1}{|\xi|^2_\pm-\tau}\mathscr{F}_{t,x}f. \tag{6.4.23}$$

不失一般性, 假设$|\xi|^2_\pm=\xi_1^2+\varepsilon_2\xi_2^2+...+\varepsilon_n\xi_n^n:=\xi_1^2+|\bar{\xi}|^2_\pm$. 由Plancherel 等式,

$$\|u\|_{L^\infty_{x_1}L^2_{\bar{x}}L^2_t}\leqslant\left\|\mathscr{F}^{-1}_{\xi_1}\frac{\xi_1}{\xi_1^2+|\bar{\xi}|^2_\pm-\tau}\mathscr{F}_{t,x}f\right\|_{L^2_{\bar{\xi}}L^\infty_{x_1}L^2_\tau}. \tag{6.4.24}$$

做变量替换$\tau \to \mu + |\bar{\xi}|_{\pm}^2$, (6.4.24) 的右端变成

$$\left\| \mathscr{F}_{\xi_1}^{-1} \frac{\xi_1}{\xi_1^2 - \mu} \mathscr{F}_{t,x_1} (e^{-\mathrm{i}t|\bar{\xi}|_{\pm}^2} \mathscr{F}_{x_2,...,x_n} f) \right\|_{L_{\bar{\xi}}^2 L_{x_1}^\infty L_\mu^2}. \tag{6.4.25}$$

回忆一维空间的光滑效应估计

$$\left\| \mathscr{F}_{\tau,\xi}^{-1} \frac{\xi}{\xi^2 - \tau} \mathscr{F}_{t,x} f \right\|_{L_x^\infty L_t^2(\mathbb{R}^{1+1})} \lesssim \|f\|_{L_x^1 L_t^2(\mathbb{R}^{1+1})}, \tag{6.4.26}$$

由(6.4.24), (6.4.25) 和(6.4.26) 得到

$$\|u\|_{L_{x_1}^\infty L_{\bar{x}}^2 L_t^2} \lesssim \left\| e^{-\mathrm{i}t|\bar{\xi}|_{\pm}^2} \mathscr{F}_{x_2,...,x_n} f \right\|_{L_{\bar{\xi}}^2 L_{x_1}^1 L_t^2}. \tag{6.4.27}$$

使用Minkowski 不等式和Plancherel 等式, 立得

$$\|u\|_{L_{x_1}^\infty L_{\bar{x}}^2 L_t^2} \lesssim \|f\|_{L_{x_1}^1 L_{\bar{x}}^2 L_t^2}. \tag{6.4.28}$$

注意$\partial_{x_1} \mathscr{A} f = u - \partial_{x_1} S(t) \int_{-\infty}^{\infty} S(s) \mathrm{sgn}(s) f(s) ds$, 可以看出, (6.4.28) 中用$\partial_{x_1} \mathscr{A} f$替换$u$, 结论不变. □

§6.4.4 频率局部化线性估计: 无导数相互作用情形

本节考虑Schrödinger群限制到一致局部频率空间时的光滑效应估计, 极大函数估计以及它们和Strichartz 估计之间的联系. 设定义在$\mathbb{R}$上的函数列$\{\eta_k\}_{k\in\mathbb{Z}} \in \Upsilon_1$, 回忆

$$\sigma_k(\xi) := \eta_{k_1}(\xi_1)...\eta_{k_n}(\xi_n), \tag{6.4.29}$$

则有$\{\sigma_k\}_{k\in\mathbb{Z}^n} \in \Upsilon_n$. 以下总使用(6.4.29). 回忆$\square_k = \mathscr{F}^{-1}\sigma_k \mathscr{F}$. 为方便, 以下总记$\tilde{\square}_k = \sum_{|\ell|_\infty \leqslant 1} \square_{k+\ell}$.

引理6.4.3. 队任何$\sigma \in \mathbb{R}$, $k = (k_1, ..., k_n) \in \mathbb{Z}^n$ with $|k_i| \geqslant 4$, 有

$$\|\square_k D_{x_i}^\sigma u\|_{L_{x_1}^{p_1} L_{x_2,...,x_n}^{p_2} L_t^{p_2}} \lesssim \langle k_i \rangle^\sigma \|\square_k u\|_{L_{x_1}^{p_1} L_{x_2,...,x_n}^{p_2} L_t^{p_2}}.$$

用$\partial_{x_i}^\sigma$ $(\sigma \in \mathbb{N})$ 取代$D_{x_i}^\sigma$ by 上述不等式对所有$k \in \mathbb{Z}^n$ 都对.

证明. 使用(6.4.29), 有

$$\square_k D_{x_i}^\sigma u = \sum_{\ell=-1}^{1} \int_{\mathbb{R}} \left(\mathscr{F}_{\xi_i}^{-1} (\eta_{k_i+\ell}(\xi_i) |\xi_i|^\sigma) \right) (y_i) (\square_k u)(x_i - y_i) dy_i.$$

使用Young 不等式和

$$\|\mathscr{F}_{\xi_i}^{-1}(\eta_{k_i+\ell}(\xi_i)|\xi_i|^{\sigma})\|_{L^1(\mathbb{R})} \lesssim \langle k_i\rangle^{\sigma},$$

我们立即得到结论. □

命题6.4.4. (极大函数估计) 设$4/n < q \leqslant \infty$, $q \geqslant 2$. 则有

$$\|\Box_k S(t)u_0\|_{L^q_{x_i}L^\infty_{(x_j)_{j\neq i}}L^\infty_t} \lesssim \langle k_i\rangle^{1/q}\|\Box_k u_0\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}. \tag{6.4.30}$$

证明. 为方便, 记$\bar{x} = (x_1, ..., x_{n-1})$. 使用对偶估计, 只要证明下面的不等式:

$$\|\mathscr{F}^{-1}e^{\mathrm{i}t|\xi|^2_\pm}\eta_{k_1}(\xi_1)\eta_{\bar{k}}(\bar{\xi})\|_{L^{q/2}_{x_1}L^\infty_{\bar{x},t}(\mathbb{R}^n)} \lesssim \langle k_1\rangle^{2/q}.$$

$\Box_k S(t)$ 满足下面的衰减,

$$\|\mathscr{F}_{\bar{\xi}}^{-1}e^{\mathrm{i}t|\bar{\xi}|^2_\pm}\eta_{\bar{k}}(\bar{\xi})\|_{L^\infty_{\bar{x}}(\mathbb{R}^{n-1})} \lesssim (1+|t|)^{-(n-1)/2},$$
$$\|\mathscr{F}_{\xi_1}^{-1}e^{\mathrm{i}t\xi_1^2}\eta_{k_1}(\xi_1)\|_{L^\infty_{x_1}(\mathbb{R})} \lesssim (1+|t|)^{-1/2}.$$

另一方面, 通过分部积分, 可以得到当$|x_1| > 4|t|\langle k_1\rangle$ 时,

$$|\mathscr{F}_{\xi_1}^{-1}e^{\mathrm{i}t\xi_1^2}\eta_{k_1}(\xi_1)| \lesssim |x_1|^{-2}.$$

因此, 对所有$|x_1| > 1$,

$$|\mathscr{F}^{-1}e^{\mathrm{i}t|\xi|^2_\pm}\eta_{k_1}(\xi_1)\eta_{\bar{k}}(\bar{\xi})| \lesssim (1+|x_1|)^{-2} + \langle k_1\rangle^{n/2}(\langle k_1\rangle + |x_1|)^{-n/2}.$$

这蕴含了

$$\begin{aligned}\|\mathscr{F}^{-1}e^{\mathrm{i}t|\xi|^2_\pm}\eta_{k_1}(\xi_1)\eta_{\bar{k}}(\bar{\xi})\|_{L^{q/2}_{x_1}L^\infty_{\bar{x},t}(\mathbb{R}^n)} &\lesssim 1 + \langle k_1\rangle^{n/2}\|(\langle k_1\rangle + |x_1|)^{-n/2}\|_{L^{q/2}_{x_1}(\mathbb{R})}\\ &\lesssim \langle k_1\rangle^{2/q}.\end{aligned}$$

由此可得到(6.4.30). □

由命题6.4.2, 有

命题6.4.5. (频率局部光滑效应) 对任何$k = (k_1, ..., k_n) \in \mathbb{Z}^n$, 有

$$\|\Box_k \mathscr{A}\partial_{x_i} f\|_{L^\infty_{x_i}L^2_{(x_j)_{j\neq i}}L^2_t} \lesssim \|\Box_k f\|_{L^1_{x_i}L^2_{(x_j)_{j\neq i}}L^2_t}, \tag{6.4.31}$$

$$\|\Box_k \mathscr{A}\partial_{x_i} f\|_{L^\infty_t L^2_x} \lesssim \langle k_i\rangle^{1/2}\|\Box_k f\|_{L^1_{x_i}L^2_{(x_j)_{j\neq i}}L^2_t}. \tag{6.4.32}$$

证明. 由命题6.4.2, 立即得到(6.4.31). 由命题6.4.2 和引理6.4.3, 得到(6.4.32) 当$|k_i| \geqslant 3$ 时成立. 若$|k_i| \leqslant 2$, 由命题6.4.2,

$$\begin{aligned}\|\Box_k \mathscr{A} \partial_{x_i} f\|_{L_t^\infty L_x^2} &\lesssim \left\| D_{x_i}^{-1/2} \Box_k \mathscr{A} \partial_{x_i} f \right\|_{L_t^\infty L_x^2} \\ &\lesssim \|\Box_k f\|_{L^1_{x_i} L^2_{(x_j)_{j\neq i}} L^2_t},\end{aligned}$$

这蕴含了想要的结果. □

命题6.4.6. (Strichartz, 光滑效应和极大函数估计的关系) 设$2 \leqslant r < \infty$, $2/\gamma(r) = n(1/2 - 1/r)$ and $\gamma > \gamma(r) \vee 2$. 我们有

$$\|\Box_k S(t) u_0\|_{L_t^\gamma L_x^r} \lesssim \|\Box_k u_0\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}, \tag{6.4.33}$$

$$\|\Box_k \mathscr{A} f\|_{L_t^\infty L_x^2 \cap L_t^\gamma L_x^r} \lesssim \|\Box_k f\|_{L_t^{\gamma'} L_x^{r'}}, \tag{6.4.34}$$

$$\|\Box_k \mathscr{A} \partial_{x_i} f\|_{L_t^\gamma L_x^r} \lesssim \langle k_i \rangle^{1/2} \|\Box_k f\|_{L^1_{x_i} L^2_{(x_j)_{j\neq i}} L^2_t}, \tag{6.4.35}$$

$$\|\Box_k \mathscr{A} \partial_{x_i} f\|_{L^\infty_{x_i} L^2_{(x_j)_{j\neq i}} L^2_t} \lesssim \langle k_i \rangle^{1/2} \|\Box_k f\|_{L_t^{\gamma'} L_x^{r'}}, \tag{6.4.36}$$

$$\left\|\Box_k \mathscr{A} \partial^\alpha_{x_i} f\right\|_{L^2_{x_i} L^\infty_{(x_j)_{j\neq i}} L^\infty_t} \lesssim \langle k_i \rangle^{\alpha+1/2} \|\Box_k f\|_{L^1_t L^2_x}. \tag{6.4.37}$$

证明. (6.4.33) 和(6.4.34) 是Strichartz 估计的直接推论. 由(6.4.30) 可直接得到(6.4.37). 为方便, 记

$$\mathcal{L}_k(f, \psi) := \left| \int_{\mathbb{R}} \left(\Box_k \int_{\mathbb{R}} S(t-\tau) f(\tau) d\tau,\ \psi(t) \right) dt \right|. \tag{6.4.38}$$

现在证明(6.4.35). 使用Strichartz不等式, 引理6.4.3 和命题6.4.5,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_k(\partial_{x_1} f, \psi) &\lesssim \langle k_i \rangle^{1/2} \|\Box_k f\|_{L^1_{x_1} L^2_{x_2,\ldots,x_n} L^2_t} \left\| \tilde{\Box}_k \psi \right\|_{L_t^{\gamma'} L_x^{r'}} \\ &\lesssim \langle k_i \rangle^{1/2} \|\Box_k f\|_{L^1_{x_1} L^2_{x_2,\ldots,x_n} L^2_t} \|\psi\|_{L_t^{\gamma'} L_x^{r'}}.\end{aligned} \tag{6.4.39}$$

由对偶性, (6.4.45) 和Christ-Kiselev 引理(见附录) 便可得到(6.4.35) 成立. 交换f 和ψ 的位置, 立即得到(6.4.36) 对$r > 2$ 成立. 当$r = 2$, (6.4.36) 是$S(t)$ 的1/2 阶光滑效应的直接推论. □

推论6.4.7. 设$2 \leqslant q < \infty$, $q > 4/n$, $4/n \leqslant p < \infty$. 我们有如下结论.

$$\left\| D^{1/2}_{x_1} \Box_k S(t) u_0 \right\|_{L^\infty_{x_1} L^2_{x_2,\ldots,x_n} L^2_t} \lesssim \|\Box_k u_0\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}, \tag{6.4.40}$$

$$\|\Box_k S(t) u_0\|_{L^q_{x_1} L^\infty_{x_2,\ldots,x_n} L^\infty_t} \lesssim \langle k_i \rangle^{1/q} \|\Box_k u_0\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}, \tag{6.4.41}$$

$$\|\square_k S(t)u_0\|_{L^{2+p}_{t,x}\cap L^\infty_t L^2_x} \lesssim \|\square_k u_0\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}, \tag{6.4.42}$$

$$\|\square_k \mathscr{A}\partial_{x_1} f\|_{L^\infty_{x_1}L^2_{x_2,\dots,x_n}L^2_t} \lesssim \|\square_k f\|_{L^1_{x_1}L^2_{x_2,\dots,x_n}L^2_t}, \tag{6.4.43}$$

$$\|\square_k \mathscr{A} f\|_{L^\infty_t L^2_x\cap L^{2+p}_{t,x}} \lesssim \langle k_1\rangle^{1/2}\|\square_k f\|_{L^1_{x_1}L^2_{x_2,\dots,x_n}L^2_t}. \tag{6.4.44}$$

$$\|\square_k \mathscr{A}\partial_{x_1} f\|_{L^\infty_{x_1}L^2_{x_2,\dots,x_n}L^2_t} \lesssim \langle k_1\rangle^{1/2}\|\square_k f\|_{L^{(2+p)/(1+p)}_{t,x}}, \tag{6.4.45}$$

$$\|\square_k \mathscr{A}\partial_{x_1} f\|_{L^q_{x_1}L^\infty_{x_2,\dots,x_n}L^\infty_t} \lesssim \langle k_1\rangle^{1+1/q}\|\square_k f\|_{L^1_t L^2}, \tag{6.4.46}$$

$$\|\square_k \mathscr{A} f\|_{L^\infty_t L^2_x\cap L^{2+p}_{t,x}} \lesssim \|\square_k f\|_{L^{(2+p)/(1+p)}_{t,x}}. \tag{6.4.47}$$

进一步, 上面不等式左端的$L^{2+p}_{x,t}$ 被$L^3_t L^6_x$ 所取代, 结论仍然成立.

§6.4.5 频率局部化线性估计: 导数相互作用情形

由推论6.4.7 中的(6.4.43), 算子$\mathscr{A}$ 在空间$L^\infty_{x_1}L^2_{x_2,\dots,x_n}L^2_t$ 中成功地吸收了偏导数∂_{x_1}. 不过, $\mathscr{A}$ 在$L^\infty_{x_1}L^2_{x_2,\dots,x_n}L^2_t$ 中并不能吸收∂_{x_2}. 所以, 当∂_{x_2} 出现在$L^\infty_{x_1}L^2_{x_2,\dots,x_n}L^2_t$ 范数内部时, 我们需要新的方法处理. 先有下面的

命题6.4.8. 设$i=2,\dots,n$, $2\leqslant q\leqslant\infty$, $q>4/n$, $2\leqslant r<\infty$, $2/\gamma(r)=n(1/2-1/r)$, $\gamma\geqslant\gamma(r)$, $\gamma>2$. 则有

$$\|\square_k\partial_{x_i}\mathscr{A} f\|_{L^\infty_{x_1}L^2_{x_2,\dots,x_n}L^2_t} \lesssim \|\partial_{x_i}\partial_{x_1}^{-1}\square_k f\|_{L^1_{x_1}L^2_{x_2,\dots,x_n}L^2_t}, \tag{6.4.48}$$

$$\|\square_k\partial_{x_i}\mathscr{A} f\|_{L^\infty_{x_1}L^2_{x_2,\dots,x_n}L^2_t} \lesssim \|\partial_{x_i}D_{x_1}^{-1/2}\square_k f\|_{L^{\gamma'}L^{r'}_x}, \tag{6.4.49}$$

$$\|\square_k\partial_{x_i}\mathscr{A} f\|_{L^q_{x_1}L^\infty_{x_2,\dots,x_n}L^\infty_t} \lesssim \langle k_i\rangle\langle k_1\rangle^{1/q}\|\square_k f\|_{L^1_t L^2_x}. \tag{6.4.50}$$

证明. (6.4.48) 是命题6.4.2 的直接推论. 我们有

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(\partial_{x_2}f,\psi) &:= \left|\int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}} S(t-\tau)\partial_{x_2}f(\tau)d\tau,\ \psi(t)\right)dt\right|\\ &\leqslant \left\|\int_{\mathbb{R}} S(-\tau)\partial_{x_2}D_{x_1}^{-1/2}f(\tau)d\tau\right\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}\left\|D_{x_1}^{1/2}\int_{\mathbb{R}} S(-t)\psi(t)dt\right\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}.\end{aligned} \tag{6.4.51}$$

由Strichartz 不等式和命题6.4.2,

$$\mathcal{L}(\partial_{x_2}f,\psi) \lesssim \|\partial_{x_2}D_{x_1}^{-1/2}f\|_{L^{\gamma'}_t L^{r'}_x}\|\psi\|_{L^1_{x_1}L^2_{x_2,\dots,x_n}L^2_t}. \tag{6.4.52}$$

$r>2$时, 使用对偶性, Christ-Kiselev 引理, (6.4.52) 蕴含(6.4.49). $r=2$ 时, 由$S(t)$ 的1/2 阶光滑效应, 我们看到(6.4.49) 也对. 由命题6.4.4,我们也有(6.4.50). □

引理6.4.9. 设$\psi:[0,\infty)\to[0,1]$ 为光滑截断函数满足$\psi(x)=1$, $|x|\leqslant 1$; 以及$\psi(x)=0$, $|x|\geqslant 2$. 设$\psi_1(\xi)=\psi(\xi_2/2\xi_1)$, $\psi_2(\xi)=1-\psi(\xi_2/2\xi_1)$, $\xi\in\mathbb{R}^n$. 则对所有$\sigma\geqslant 0$,

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}^n,\,|k_1|>4}\langle k_1\rangle^\sigma\left\|\mathscr{F}^{-1}_{\xi_1,\xi_2}\psi_1\mathscr{F}_{x_1,x_2}\Box_k\partial_{x_2}\mathscr{A}f\right\|_{L^\infty_{x_1}L^2_{x_2,\dots,x_n}L^2_t} \lesssim \sum_{k\in\mathbb{Z}^n,\,|k_1|>4}\langle k_1\rangle^\sigma\|\Box_k f\|_{L^1_{x_1}L^2_{x_2,\dots,x_n}L^2_t}, \tag{6.4.53}$$

对$\sigma\geqslant 1$,

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}^n,\,|k_1|>4}\langle k_1\rangle^\sigma\left\|\mathscr{F}^{-1}_{\xi_1,\xi_2}\psi_2\mathscr{F}_{x_1,x_2}\Box_k\partial_{x_2}\mathscr{A}f\right\|_{L^\infty_{x_1}L^2_{x_2,\dots,x_n}L^2_t} \lesssim \sum_{k\in\mathbb{Z}^n,\,|k_2|>4}\langle k_2\rangle^\sigma\|\Box_k f\|_{L^1_{x_1}L^2_{x_2,\dots,x_n}L^2_t}. \tag{6.4.54}$$

证明. 为简单, 我们记$\bar{x}=(x_2,\dots,x_n)$

$$I=\left\|\mathscr{F}^{-1}_{\xi_1,\xi_2}\psi_1\mathscr{F}_{x_1,x_2}\Box_k\partial_{x_2}\mathscr{A}f\right\|_{L^\infty_{x_1}L^2_{\bar{x}}L^2_t},$$

$$II=\left\|\mathscr{F}^{-1}_{\xi_1,\xi_2}\psi_2\mathscr{F}_{x_1,x_2}\Box_k\partial_{x_2}\mathscr{A}f\right\|_{L^\infty_{x_1}L^2_{\bar{x}}L^2_t}.$$

设η_k 同引理(6.4.29). 对$k\in\mathbb{Z}^n$, $|k_1|>4$, 应用$\Box_k$ 的几乎正交性, 有

$$I\lesssim\sum_{|\ell_1|,|\ell_2|\leqslant 1}\left\|\mathscr{F}^{-1}_{\xi_1,\xi_2}\psi\left(\frac{\xi_2}{2\xi_1}\right)\frac{\xi_2}{\xi_1}\prod_{i=1,2}\eta_{k_i+\ell_i}(\xi_i)\mathscr{F}_{x_1,x_2}\Box_k\partial_{x_1}\mathscr{A}f\right\|_{L^\infty_{x_1}L^2_{\bar{x}}L^2_t}. \tag{6.4.55}$$

记

$$(f\circledast_{12}g)(x)=\int_{\mathbb{R}^2}f(t,x_1-y_1,x_2-y_2,x_3,\dots,x_n)g(t,y_1,y_2)dy_1dy_2. \tag{6.4.56}$$

对$\mathbb{R}^{1+n}$上的任何Banach函数空间X, 有

$$\|f\circledast_{12}g\|_X\leqslant\|g\|_{L^1_{y_1,y_2}(\mathbb{R}^2)}\sup_{y_1,y_2}\|f(\cdot,\cdot-y_1,\cdot-y_2,\cdot,\dots,\cdot)\|_X. \tag{6.4.57}$$

因此, 由(6.4.55) 和(6.4.57),

$$I\lesssim\sum_{|\ell_1|,|\ell_2|\leqslant 1}\left\|\mathscr{F}^{-1}_{\xi_1,\xi_2}\psi\left(\frac{\xi_2}{2\xi_1}\right)\frac{\xi_2}{\xi_1}\prod_{i=1,2}\eta_{k_i+\ell_i}(\xi_i)\right\|_{L^1(\mathbb{R}^2)}\|\Box_k\partial_{x_1}\mathscr{A}f\|_{L^\infty_{x_1}L^2_{\bar{x}}L^2_t}. \tag{6.4.58}$$

使用乘子估计, 对$|k_1| > 4$, 我们有

$$\begin{aligned}&\left\|\mathscr{F}^{-1}_{\xi_1,\xi_2}\psi\left(\frac{\xi_2}{2\xi_1}\right)\frac{\xi_2}{\xi_1}\prod_{i=1,2}\eta_{k_i+\ell_i}(\xi_i)\right\|_{L^1(\mathbb{R}^2)}\\&\lesssim\sum_{|\alpha|\leqslant 2}\left\|D^\alpha\left[\psi\left(\frac{\xi_2}{2\xi_1}\right)\frac{\xi_2}{\xi_1}\prod_{i=1,2}\eta_{k_i+\ell_i}(\xi_i)\right]\right\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}\lesssim 1.\end{aligned}\tag{6.4.59}$$

由命题6.4.5, (6.4.58) 和(6.4.59), 有

$$I\lesssim\|\Box_k f\|_{L^1_{x_1}L^2_{\bar{x}}L^2_t},\quad |k_1|\geqslant 4.\tag{6.4.60}$$

下面考虑II. 使用命题6.4.8,

$$\begin{aligned}II&\lesssim\left\|\mathscr{F}^{-1}_{\xi_1,\xi_2}(\xi_2/\xi_1)\psi_2\mathscr{F}_{x_1,x_2}\Box_k f\right\|_{L^1_{x_1}L^2_{\bar{x}}L^2_t}\\&\lesssim\sum_{|\ell_1|,|\ell_2|\leqslant 1}\left\|\mathscr{F}^{-1}_{\xi_1,\xi_2}\left(1-\psi\left(\frac{\xi_2}{2\xi_1}\right)\right)\frac{\xi_2}{\xi_1}\prod_{i=1,2}\eta_{k_i+\ell_i}(\xi_i)\right\|_{L^1(\mathbb{R}^2)}\\&\qquad\times\|\Box_k f\|_{L^1_{x_1}L^2_{\bar{x}}L^2_t}.\end{aligned}\tag{6.4.61}$$

注意到$\mathrm{supp}\psi_2\subset\{\xi: |\xi_2|\geqslant 2|\xi_1|\}$. 若$|k_1|\geqslant 4$, 则有$|k_2| > 6$ 且在(6.4.54) 左端的求和中$|k_2|\geqslant|k_1|$. 于是, $\sum_{k\in\mathbb{Z}^n,\ |k_1|>4}\langle k_1\rangle^\sigma II\leqslant\sum_{k\in\mathbb{Z}^n,\ |k_1|>4}\langle k_2\rangle^{\sigma-1}\langle k_1\rangle II$.

$$\begin{aligned}&\left\|\mathscr{F}^{-1}_{\xi_1,\xi_2}\left(1-\psi\left(\frac{\xi_2}{2\xi_1}\right)\right)\frac{\xi_2}{\xi_1}\prod_{i=1,2}\eta_{k_i+\ell_i}(\xi_i)\right\|_{L^1(\mathbb{R}^2)}\\&\lesssim\sum_{|\alpha|\leqslant 2}\left\|D^\alpha\left[\mathscr{F}^{-1}_{\xi_1,\xi_2}\left(1-\psi\left(\frac{\xi_2}{2\xi_1}\right)\right)\frac{\xi_2}{\xi_1}\prod_{i=1,2}\eta_{k_i+\ell_i}(\xi_i)\right]\right\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}\\&\lesssim\langle k_2\rangle\langle k_1\rangle^{-1}.\end{aligned}\tag{6.4.62}$$

(6.4.61) 和(6.4.62) 结合便得到II 的估计. □

§6.4.6　整体适定性的的证明

定义

$$\varrho_1^{(i)}(u)=\sum_{k\in\mathbb{Z}^n,\ |k_i|>4}\langle k_i\rangle^2\|\Box_k u\|_{L^\infty_{x_i}L^2_{(x_j)_{j\neq i}}L^2_t},$$

$$\varrho_2^{(i)}(u) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \|\Box_k u\|_{L^m_{x_i} L^\infty_{(x_j)_{j\neq i}} L^\infty_t},$$
$$\varrho_3^{(i)}(u) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \langle k_i\rangle^{3/2} \|\Box_k u\|_{L^3_t L^6_x \cap L^\infty_t L^2_x}.$$

记

$$X := \left\{ u \in \mathscr{S}' : \ \|u\|_X := \sum_{\ell=1}^{3} \sum_{\alpha=0,1} \sum_{i,j=1}^{n} \varrho_\ell^{(i)}(\partial^\alpha_{x_j} u) \leqslant \delta \right\}.$$

考虑映射:

$$\mathscr{T} : u(t) \to S(t)u_0 - \mathrm{i}\mathscr{A} F(u, \bar{u}, \nabla u, \nabla \bar{u}),$$

我们证明$\mathscr{T} : X \to X$ 为压缩映射. 由于$\|u\|_X = \|\bar{u}\|_X$, 因此可以假设

$$F(u, \bar{u}, \nabla u, \nabla \bar{u}) = F(u, \nabla u) := \sum_{m+1\leqslant \kappa+|\nu|<\infty} c_{\kappa\nu} u^\kappa (\nabla u)^\nu,$$

其中$(\nabla u)^\nu = u^{\nu_1}_{x_1} ... u^{\nu_n}_{x_n}$. 为了方便, 我们记

$$v_1 = ... = v_\kappa = u, \quad v_{\kappa+1} = ... = v_{\kappa+\nu_1} = u_{x_1}, ..., v_{\kappa+|\nu|-\nu_n+1} = ... = v_{\kappa+|\nu|} = u_{x_n}.$$

由(6.4.18), 对$\alpha = 0, 1$,

$$\varrho_1^{(i)}(\partial^\alpha_{x_j} S(t)u_0) \lesssim \sum_{k\in\mathbb{Z}^n, \ |k_i|>4} \langle k_i\rangle^{1/2} \langle k_j\rangle^2 \|\Box_k u_0\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leqslant \|u_0\|_{M^{5/2}_{2,1}}.$$

由(6.4.41), (6.4.42), 对$\alpha = 0, 1$, 我们有

$$\varrho_2^{(i)}(\partial^\alpha_{x_j} S(t)u_0) + \varrho_3^{(i)}(\partial^\alpha_{x_j} S(t)u_0) \lesssim \|u_0\|_{M^{5/2}_{2,1}}.$$

因此,

$$\|S(t)u_0\|_X \lesssim \|u_0\|_{M^{5/2}_{2,1}}.$$

为了估计$\varrho_1^{(i)}(\mathscr{A}\partial^\alpha_{x_j}(v_1...v_{\kappa+|\nu|}))$, $i, j = 1, ..., n$, 只要估计$\varrho_1^{(1)}(\mathscr{A}\partial^\alpha_{x_1}(v_1...v_{\kappa+|\nu|}))$ 和$\varrho_1^{(1)}(\mathscr{A}\partial^\alpha_{x_2}(v_1...v_{\kappa+|\nu|}))$ 就可以了. 使用频率一致分解, 有

$$\Box_k(v_1...v_{\kappa+|\nu|}) = \sum_{\mathbb{S}_1^{(i)}} \Box_k \left(\Box_{k^{(1)}} v_1 ... \Box_{k^{(\kappa+|\nu|)}} v_{\kappa+|\nu|}\right)$$

$$+\sum_{\mathbb{S}_2^{(i)}}\square_k\left(\square_{k^{(1)}}v_1...\square_{k^{(\kappa+|\nu|)}}v_{\kappa+|\nu|}\right), \tag{6.4.63}$$

其中

$$\mathbb{S}_1^{(i)} := \{(k^{(1)},...,k^{(\kappa+|\nu|)}):\ |k_i^{(1)}|\vee...\vee|k_i^{(\kappa+|\nu|)}|>4\},$$
$$\mathbb{S}_2^{(i)} := \{(k^{(1)},...,k^{(\kappa+|\nu|)}):\ |k_i^{(1)}|\vee...\vee|k_i^{(\kappa+|\nu|)}|\leqslant 4\}.$$

以下我们经常使用下面$\square_k$的几乎正交性质:

$$\square_k\left(\square_{k^{(1)}}v_1...\square_{k^{(\kappa+|\nu|)}}v_{\kappa+|\nu|}\right)=0,\quad |k-k^{(1)}-...-k^{(\kappa+|\nu|)}|\geqslant C. \tag{6.4.64}$$

仍记$\bar{x}=(x_2,...,x_n)$. 由(6.4.31) 和(6.4.36),

$$\begin{aligned}
&\varrho_1^{(1)}(\mathscr{A}\partial_{x_1}^{\alpha}(v_1...v_{\kappa+|\nu|}))\\
&\lesssim \sum_{k\in\mathbb{Z}^n,\ |k_1|>4}\langle k_1\rangle^2\sum_{\mathbb{S}_1^{(1)}}\|\square_k\left(\square_{k^{(1)}}v_1...\square_{k^{(\kappa+|\nu|)}}v_{\kappa+|\nu|}\right)\|_{L^1_{x_1}L^2_{\bar{x}}L^2_t}\\
&\quad+\sum_{k\in\mathbb{Z}^n,\ |k_1|>4}\langle k_1\rangle^{5/2}\sum_{\mathbb{S}_2^{(1)}}\|\square_k\left(\square_{k^{(1)}}v_1...\square_{k^{(\kappa+|\nu|)}}v_{\kappa+|\nu|}\right)\|_{L_{t,x}^{\frac{\kappa+|\nu|+1}{\kappa+|\nu|}}}\\
&:= I+II.
\end{aligned} \tag{6.4.65}$$

使用$\square_k$的几乎正交性质(6.4.64),

$$\begin{aligned}
I\lesssim&\sum_{k^{(1)}\in\mathbb{Z}^n,\ |k_1^{(1)}|>2}\langle k_1^{(1)}\rangle^2\|\square_{k^{(1)}}v_1\|_{L^\infty_{x_1}L^2_{\bar{x}}L^2_t}\\
&\times\sum_{k^{(2)},...,k^{(\kappa+|\nu|)}\in\mathbb{Z}^n}\prod_{i=2}^{\kappa+|\nu|}\|\square_{k^{(i)}}v_i\|_{L^{\kappa+|\nu|-1}_{x_1}L^\infty_{\bar{x}}L^\infty_t}.
\end{aligned} \tag{6.4.66}$$

由Hölder 不等式, 结合引理6.1.1,

$$\begin{aligned}
&\|\square_{k^{(i)}}v_i\|_{L^{\kappa+|\nu|-1}_{x_1}L^\infty_{\bar{x}}L^\infty_t}\\
&\leqslant\|\square_{k^{(i)}}v_i\|^{\frac{m}{\kappa+|\nu|-1}}_{L^m_{x_1}L^\infty_{\bar{x}}L^\infty_t}\|\square_{k^{(i)}}v_i\|^{1-\frac{m}{\kappa+|\nu|-1}}_{L^\infty_{x,t}}\\
&\lesssim\|\square_{k^{(i)}}v_i\|^{\frac{m}{\kappa+|\nu|-1}}_{L^m_{x_1}L^\infty_{\bar{x}}L^\infty_t}\|\square_{k^{(i)}}v_i\|^{1-\frac{m}{\kappa+|\nu|-1}}_{L^\infty_tL^2_x}.
\end{aligned} \tag{6.4.67}$$

从而, 注意到$v_i=u$ 或者$v_i=u_{x_j}$, 从(6.4.66) 和(6.4.67) 得到,

$$I\lesssim\|u\|_X^{\kappa+|\nu|}. \tag{6.4.68}$$

由$\mathbb{S}_2^{(1)}$ 的构造, 在II的求和中有$|k_1|\leqslant C$. 再次使用Hölder 不等式和引理6.1.1,

$$\begin{aligned}\|\Box_{k^{(1)}}v_1...\Box_{k^{(\kappa+|\nu|)}}v_{\kappa+|\nu|}\|_{L_{x,t}^{\frac{\kappa+|\nu|+1}{\kappa+|\nu|}}} &\leqslant \prod_{i=1}^{\kappa+|\nu|}\|\Box_{k^{(i)}}v_i\|_{L_{x,t}^{\kappa+|\nu|+1}}\\ &\lesssim \prod_{i=1}^{\kappa+|\nu|}\|\Box_{k^{(i)}}v_i\|_{L_{x,t}^{2+m}\cap L_t^\infty L_x^2}.\end{aligned}\tag{6.4.69}$$

这蕴含了,

$$II\lesssim \|u\|_X^{\kappa+|\nu|}.\tag{6.4.70}$$

下面估计$\varrho_1^{(1)}(\mathscr{A}\partial_{x_2}^\alpha(v_1...v_{\kappa+|\nu|}))$. $\alpha=0$ 的情形上面已讨论过, 故只需要考虑$\alpha=1$ 的情形. 设ψ_i $(i=1,2)$ 由引理6.4.9 给出, 记$P_i=\mathscr{F}^{-1}\psi_i\mathscr{F}$. 我们有

$$\begin{aligned}&\varrho_1^{(1)}(\mathscr{A}\partial_{x_2}(v_1...v_{\kappa+|\nu|}))\\ &\leqslant \sum_{k\in\mathbb{Z}^n,\ |k_1|>4}\langle k_1\rangle^2\|P_1\Box_k(\mathscr{A}\partial_{x_2}(v_1...v_{\kappa+|\nu|}))\|_{L_{x_1}^\infty L_{\bar{x}}^2L_t^2}\\ &\quad+\sum_{k\in\mathbb{Z}^n,\ |k_1|>4}\langle k_1\rangle^2\|P_2\Box_k(\mathscr{A}\partial_{x_2}(v_1...v_{\kappa+|\nu|}))\|_{L_{x_1}^\infty L_{\bar{x}}^2L_t^2}\\ &:=III+IV.\end{aligned}\tag{6.4.71}$$

使用分解(6.4.63), 有

$$\begin{aligned}III\leqslant&\sum_{k\in\mathbb{Z}^n,\ |k_1|>4}\langle k_1\rangle^2\sum_{\mathbb{S}_1^{(1)}}\|P_1\Box_k(\mathscr{A}\partial_{x_2}(\Box_{k^{(1)}}v_1...\Box_{k^{(\kappa+|\nu|)}}v_{\kappa+|\nu|}))\|_{L_{x_1}^\infty L_{\bar{x}}^2L_t^2}\\ &+\sum_{k\in\mathbb{Z}^n,\ |k_1|>4}\langle k_1\rangle^2\sum_{\mathbb{S}_2^{(1)}}\|P_1\Box_k(\mathscr{A}\partial_{x_2}(\Box_{k^{(1)}}v_1...\Box_{k^{(\kappa+|\nu|)}}v_{\kappa+|\nu|}))\|_{L_{x_1}^\infty L_{\bar{x}}^2L_t^2}\\ :=&III_1+III_2.\end{aligned}\tag{6.4.72}$$

由引理6.4.9,

$$III_1\lesssim\sum_{\mathbb{S}_1^{(1)}}\sum_{k\in\mathbb{Z}^n,\ |k_1|>4}\langle k_1\rangle^2\|\Box_k(\Box_{k^{(1)}}v_1...\Box_{k^{(\kappa+|\nu|)}}v_{\kappa+|\nu|})\|_{L_{x_1}^1L_{\bar{x}}^2L_t^2}.\tag{6.4.73}$$

由对称性, 在$\mathbb{S}_1^{(1)}$ 中可以设$|k_1^{(1)}|=\max(|k_1^{(1)}|,...,|k_1^{(\kappa+|\nu|)}|)$. 从而,

$$III_1\lesssim\sum_{\mathbb{S}_1^{(1)},\ |k_1^{(1)}|>4}\langle k_1^{(1)}\rangle^2\|\Box_{k^{(1)}}v_1\|_{L_{x_1}^\infty L_{\bar{x}}^2L_t^2}\prod_{i=2}^{\kappa+|\nu|}\|\Box_{k^{(i)}}v_i\|_{L_{x_1}^{\kappa+|\nu|-1}L_{\bar{x}}^\infty L_t^\infty}$$

$$\lesssim \varrho_1^{(1)}(v_1)\prod_{i=2}^{\kappa+|\nu|}(\varrho_2^{(1)}(v_i)+\varrho_3^{(1)}(v_i))\lesssim \|u\|_X^{\kappa+|\nu|}. \tag{6.4.74}$$

使用(6.4.49) 且注意在III_2 中$|k_1|\leqslant C$,

$$\begin{aligned}III_2 &\lesssim \sum_{k\in\mathbb{Z}^n,\ |k_1|>4,\ |k_2|\lesssim|k_1|}\langle k_1\rangle^{5/2}\sum_{\mathbb{S}_2^{(1)}}\|\Box_k(\Box_{k^{(1)}}v_1\ldots\Box_{k^{(\kappa+|\nu|)}}v_{\kappa+|\nu|})\|_{L_{t,x}^{(2+m)/(1+m)}}\\ &\lesssim \prod_{i=1}^{\kappa+|\nu|}\varrho_3^{(1)}(v_i)\leqslant \|u\|_X^{\kappa+|\nu|}. \end{aligned}\tag{6.4.75}$$

我们已经证明了

$$III\lesssim \|u\|_X^{\kappa+|\nu|}. \tag{6.4.76}$$

下面估计IV. 应用分解(6.4.63),

$$\begin{aligned}IV \leqslant & \sum_{k\in\mathbb{Z}^n,\ |k_1|>4}\langle k_1\rangle^2\sum_{\mathbb{S}_1^{(2)}}\|P_2\Box_k(\mathscr{A}\partial_{x_2}(\Box_{k^{(1)}}v_1\ldots\Box_{k^{(\kappa+|\nu|)}}v_{\kappa+|\nu|}))\|_{L_{x_1}^\infty L_{\bar{x}}^2L_t^2}\\ &+\sum_{k\in\mathbb{Z}^n,\ |k_1|>4}\langle k_1\rangle^2\sum_{\mathbb{S}_2^{(2)}}\|P_2\Box_k(\mathscr{A}\partial_{x_2}(\Box_{k^{(1)}}v_1\ldots\Box_{k^{(\kappa+|\nu|)}}v_{\kappa+|\nu|}))\|_{L_{x_1}^\infty L_{\bar{x}}^2L_t^2}\\ &:= IV_1+IV_2. \end{aligned}\tag{6.4.77}$$

由引理6.4.9,

$$IV_1\lesssim \sum_{\mathbb{S}_1^{(2)}}\sum_{k\in\mathbb{Z}^n,\ |k_2|>4}\langle k_2\rangle^2\|\Box_k(\Box_{k^{(1)}}v_1\ldots\Box_{k^{(\kappa+|\nu|)}}v_{\kappa+|\nu|})\|_{L_{x_1}^1L_{\bar{x}}^2L_t^2}. \tag{6.4.78}$$

选取某个$k^{(i)}$, 设为$k^{(\kappa+|\nu|)}$ 使得$|k_2^{(\kappa+|\nu|)}|$ 不取到, 或不唯一取到$\max_{1\leqslant i\leqslant\kappa+|\nu|}|k_2^{(i)}|$; 然后再取某个$k^{(i)}$, 比如$k_2^{(1)}=\max_{1\leqslant i\leqslant\kappa+|\nu|}|k_2^{(i)}|$. 则由Hölder不等式,

$$\begin{aligned}&\|\Box_{k^{(1)}}v_1\ldots\Box_{k^{(\kappa+|\nu|)}}v_{\kappa+|\nu|}\|_{L_{x_1}^1L_{\bar{x}}^2L_t^2}\\ &\leqslant \|\Box_{k^{(1)}}v_1\ldots\Box_{k^{(\kappa+|\nu|-1)}}v_{\kappa+|\nu|-1}\|_{L_{x,t}^2}\|\Box_{k^{(\kappa+|\nu|)}}v_{\kappa+|\nu|}\|_{L_{x_1}^2L_{\bar{x}}^\infty L_t^\infty}\\ &\leqslant \|\Box_{k^{(1)}}v_1\|_{L_{x_1}^\infty L_{\bar{x}}^2L_t^2}\prod_{i=2}^{\kappa+|\nu|}\|\Box_{k^{(i)}}v_i\|_{(L_t^\infty L_x^2)\cap(L_{x_1}^2L_{\bar{x},t}^\infty)}. \end{aligned}\tag{6.4.79}$$

结合(6.4.78) 和(6.4.79),

$$IV_1\lesssim \|u\|_X^{\kappa+|\nu|}. \tag{6.4.80}$$

为了估计IV_2, 我们使用(6.4.49),

$$IV_2 \lesssim \sum_{k\in\mathbb{Z}^n,\ |k_1|>4} \langle k_2\rangle^{5/2} \sum_{\mathbb{S}_2^{(2)}} \|P_2\Box_k(\Box_{k^{(1)}}v_1\dots\Box_{k^{(\kappa+|\nu|)}}v_{\kappa+|\nu|})\|_{L_{t,x}^{(2+m)/(1+m)}}$$
$$\lesssim \sum_{\mathbb{S}_2^{(2)}} \|\Box_{k^{(1)}}v_1\dots\Box_{k^{(\kappa+|\nu|)}}v_{\kappa+|\nu|}\|_{L_{t,x}^{(2+m)/(1+m)}} \lesssim \|u\|_X^{\kappa+|\nu|}. \quad (6.4.81)$$

因此, 由(6.4.80) 和(6.4.81), 得到

$$IV \lesssim \|u\|_X^{\kappa+|\nu|}. \quad (6.4.82)$$

综合(6.4.68), (6.4.70), (6.4.76), (6.4.82), 我们证明了

$$\sum_{\alpha=0,1}\sum_{i,j=1}^{n} \varrho_1^{(i)}(\mathscr{A}\partial_{x_j}^{\alpha}(u^\kappa(\nabla u)^\nu)) \lesssim \|u\|_X^{\kappa+|\nu|}. \quad (6.4.83)$$

下面估计$\varrho_3^{(i)}(\mathscr{A}(u^\kappa(\nabla u)^\nu))$. 由(6.4.47),

$$\sum_{i=1}^{n} \varrho_3^{(i)}(\mathscr{A}(u^\kappa(\nabla u)^\nu)) \lesssim \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \langle k\rangle^{3/2}\|\Box_k(u^\kappa(\nabla u)^\nu)\|_{L_{t,x}^{\frac{2+m}{1+m}}}. \quad (6.4.84)$$

使用引理6.3.15 的技巧, 可以控制(6.4.84) 的右端:

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \langle k\rangle^{3/2}\|\Box_k(v_1\dots v_{\kappa+|\nu|})\|_{L_{t,x}^{\frac{2+m}{1+m}}}$$
$$\lesssim \prod_{i=1}^{m+1}\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}^n}\langle k\rangle^{3/2}\|\Box_k v_i\|_{L_{t,x}^{2+m}}\right)\prod_{i=m+2}^{\kappa+|\nu|}\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}^n}\langle k\rangle^{3/2}\|\Box_k v_i\|_{L_{t,x}^{\infty}}\right)$$
$$\lesssim \prod_{i=1}^{m+1}\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}^n}\langle k\rangle^{3/2}\|\Box_k v_i\|_{L_{t,x}^{2+m}}\right)\prod_{i=m+2}^{\kappa+|\nu|}\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}^n}\langle k\rangle^{3/2}\|\Box_k v_i\|_{L_t^{\infty}L_x^2}\right)$$
$$\lesssim \prod_{i=1}^{\kappa+|\nu|}\left(\sum_{i=1}^{n}\varrho_3^{(1)}(v_i)\right) \leqslant \|u\|_X^{\kappa+|\nu|}. \quad (6.4.85)$$

下面估计$\varrho_2^{(1)}(\mathscr{A}\partial_{x_1}^{\alpha}(u^\kappa(\nabla u)^\nu))$.

$$\varrho_2^{(1)}(\mathscr{A}\partial_{x_1}^{\alpha}(v_1\dots v_{\kappa+|\nu|})) \lesssim \sum_{k\in\mathbb{Z}^n}\langle k\rangle^{3/2}\|\Box_k\left(v_1\dots v_{\kappa+|\nu|}\right)\|_{L_t^1L_x^2}. \quad (6.4.86)$$

类似(6.4.85), 使用引理6.3.15 可以控制(6.4.86),

$$\varrho_2^{(1)}(\mathscr{A}\partial_{x_1}^{\alpha}(v_1\dots v_{\kappa+|\nu|})) \lesssim \prod_{i=1}^{\kappa+|\nu|}\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}^n}\langle k\rangle^{3/2}\|\Box_k v_i\|_{L_t^{\infty}L_x^2\cap L_t^3L_x^6}\right)$$

$$\lesssim \|u\|_X^{\kappa+|\nu|}. \tag{6.4.87}$$

下面估计

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} \rho_3^{(i)}(\mathscr{A}\partial_{x_1}(v_1...v_{\kappa+|\nu|})) \lesssim & \sum_{|k|\leqslant 4} \|\Box_k(v_1...v_{\kappa+|\nu|})\|_{L_t^1 L_x^2} \\
& + \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}^n,\ |k_1|=k_{\max}>4} +...+ \sum_{k\in\mathbb{Z}^n,\ |k_n|=k_{\max}>4} \right) \langle k\rangle^{3/2} \\
& \times \|\Box_k \mathscr{A}\partial_{x_1}\left(v_1...v_{\kappa+|\nu|}\right)\|_{L_t^\infty L_x^2 \cap\, L_t^3 L_x^6} \\
& := \Upsilon_0(u) + \Upsilon_1(u) + ... + \Upsilon_n(u).
\end{aligned} \tag{6.4.88}$$

$\Upsilon_0(u)$ 的估计上面已经做了. 只需要估计$\Upsilon_i(u)$, $i=1,2$. 使用分解(6.4.63), 进一步使用推论6.4.7,

$$\begin{aligned}
\Upsilon_1(u) \lesssim & \sum_{k\in\mathbb{Z}^n,\ |k_1|>4} \langle k_1\rangle^2 \sum_{\mathbb{S}_1^{(1)}} \|\Box_k\left(\Box_{k^{(1)}}v_1...\Box_{k^{(\kappa+|\nu|)}}v_{\kappa+|\nu|}\right)\|_{L^1_{x_1}L^2_{\bar{x}}L^2_t} \\
& + \sum_{k\in\mathbb{Z}^n,\ |k_1|>4} \langle k_1\rangle^{5/2} \sum_{\mathbb{S}_2^{(1)}} \|\Box_k\left(\Box_{k^{(1)}}v_1...\Box_{k^{(\kappa+|\nu|)}}v_{\kappa+|\nu|}\right)\|_{L_{t,x}^{\frac{\kappa+|\nu|+1}{\kappa+|\nu|}}},
\end{aligned} \tag{6.4.89}$$

这归结为(6.4.65). 因此,

$$\Upsilon_1(u) \lesssim \|u\|_X^{\kappa+|\nu|}. \tag{6.4.90}$$

下面估计$\Upsilon_2(u)$. 注意在$\Upsilon_2(u)$的和式中$|k_1|\leqslant|k_2|$, 再次使用(6.4.44), (6.4.47),

$$\begin{aligned}
\Upsilon_2(u) \lesssim & \sum_{k\in\mathbb{Z}^n,\ |k_2|>4} \langle k_2\rangle^2 \sum_{\mathbb{S}_1^{(2)}} \|\Box_k\left(\Box_{k^{(1)}}v_1...\Box_{k^{(\kappa+|\nu|)}}v_{\kappa+|\nu|}\right)\|_{L^1_{x_1}L^2_{\bar{x}}L^2_t} \\
& + \sum_{k\in\mathbb{Z}^n,\ |k_2|>4} \langle k_2\rangle^{5/2} \sum_{\mathbb{S}_2^{(2)}} \|\Box_k\left(\Box_{k^{(1)}}v_1...\Box_{k^{(\kappa+|\nu|)}}v_{\kappa+|\nu|}\right)\|_{L_{t,x}^{\frac{\kappa+|\nu|+1}{\kappa+|\nu|}}},
\end{aligned} \tag{6.4.91}$$

上式右端第一项的估计在(6.4.79)作过了. 第二项同(6.4.65)中的II, 也做过了. 综上, 我们得到[10]

$$\|\mathscr{T}u\|_X \leqslant C\|u_0\|_{M^{3/2}} + \sum_{m+1\leqslant \ell<\infty} \ell^{2n+2} C^\ell \|u\|_X^\ell. \tag{6.4.92}$$

运用标准的压缩映射办法, 我们可以完成定理的证明.

[10] 注意$|c_\beta|\leqslant C^{|\beta|}$.

第七章　非线性色散波方程的散射算子

§7.1　伪共形守恒律、Morawetz不等式

§7.1.1　Nöther定理

谈到发展型偏微分方程, 我们自然而然地会想到该方程是不是Hamilton系统, 是否满足一些物理守恒律, 如质量守恒、能量守恒和动量守恒等等. 比如线性Schrödinger方程

$$iu_t + \Delta u = 0 \tag{7.1.1}$$

的两边与u_t作内积可得能量守恒(其中假设u及它的导数当$|x| \to +\infty$时是衰减的), 但对比较复杂的守恒量未必有这么简单的推导过程. 其实我们可以通过另外一种途径来寻找守恒量. 就能量守恒定律而言, 它不随时间而改变,这表示它们有关于时间的某种对称性. 这种物理定律对称性与物理量守恒定律的对应关系是由Emmy Nöther[1]于1918年首先发现的, 并被称之为"Nöther定理". 简单而言, Nöther定理就是说*对于力学体系的每一个连续对称性, 都有一个守恒量与之对应*. 这样就把寻找守恒量的问题简化成寻找对称性的问题, 后者相对前者要简单些.

Nöther定理的应用帮助物理学家在物理的任何一般理论中通过分析各种使得所涉及的定律的形式保持不变的变换而获得深刻的洞察力. 例如: 对于物理系统关于空间平移的不变性给出了线性动量的守恒律; 对于转动的不变性给出了角动量的守恒律; 对于时间平移的不变性给出了著名的能量守恒定律等. 下面列出了一些对称性与守恒量的对应关系(仅供参考, 对于不同的方程可能有不同的物理意义[153]):

[1] Amalie Emmy Nöther (1882–1935), 音译为"艾米·诺特", 是一位出生于德国的女数学家. 她在抽象代数和理论物理领域有着杰出贡献, 在环、域和代数的理论方面实现突破性进展; 在物理上, 她揭示了对称与守恒律之间所存在的基本联系, 即Nöther定理, 这是理论物理的中心结果之一.

对称性	守恒量
时间平移	能量或Hamiltonian
空间平移	动量或质量
空间旋转	角动量
Galilean变换	(正规化)质心
Lotentz变换	(正规化)能量中心
相移变换	质量、电荷等

如果我们知道某方程有某种对称性, 那么如何来推导其相对应的守恒量呢? 下面我们先来回顾一下变分的相关概念.

假设$I \subset \mathbb{R}$, 广义坐标$\mathbf{q}$为时间t的函数, 若$\mathcal{L} : \mathbb{R}^n_{\mathbf{q}} \times \mathbb{R}^n_{\dot{\mathbf{q}}} \times I \mapsto \mathbb{R}$关于变量$\dot{\mathbf{q}}$是光滑凸的, 则称$\mathcal{L}$为Lagrange量. 对满足相关边界条件的$q$, 定义作用量泛函为

$$\mathcal{I}[q] = \int_{t_0}^{t_1} \mathcal{L}(\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t), t) dt.$$

Hamilton原理阐明, 如果一个物理系统在两个时间点t_0、t_1的运动是正确运动, 则作用量泛函$\mathcal{I}$的一次变分$\delta\mathcal{I}$为零. 假设$\mathbf{q}(t)$是系统的正确运动, 让$\varepsilon(t)$成为一个微扰$\delta\mathbf{q}$; 微扰在轨道两个端点的值是零:

$$\varepsilon(t_0) = \varepsilon(t_1) \overset{\text{def}}{=\!=} 0. \tag{7.1.2}$$

取至$\varepsilon(t)$的一阶微扰, 作用量泛函的一次变分为

$$\delta\mathcal{I} = \int_{t_0}^{t_1} [\mathcal{L}(\mathbf{q}+\varepsilon, \dot{\mathbf{q}}+\dot{\varepsilon}) - \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})]\, dt = \int_{t_0}^{t_1} \left(\varepsilon \cdot \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} + \dot{\varepsilon} \cdot \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{q}}}\right) dt,$$

这里, 我们将拉格朗日量$\mathcal{L}$展开至$\varepsilon(t)$的一阶微扰. 对最右边项应用分部积分法, 可得

$$\delta\mathcal{I} = \left[\varepsilon \cdot \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{q}}}\right]_{t_0}^{t_1} + \int_{t_0}^{t_1} \left(\varepsilon \cdot \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{q}} - \varepsilon \cdot \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{q}}}\right) dt.$$

由边界条件(7.1.2)知第一项为零, 从而必需

$$\delta\mathcal{I} = \int_{t_0}^{t_1} \varepsilon \cdot \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{q}} - \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{q}}}\right) dt = 0.$$

特别注意, 我们没有对广义坐标$\mathbf{q}$做任何要求. 在这里, 我们要求所有的广义坐标都相互独立, 这样, 我们可以应用变分法基本引理而得到Euler-Lagrange方程:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{q}} = \mathbf{0}, \tag{7.1.3}$$

这是由n个关于$\mathbf{q}(t)$的二阶方程组成的方程组.

$\mathcal{L}$的Legendre变换为

$$\mathcal{H}(\mathbf{q}(t),\mathbf{p}(t),t)=\sup_{\dot{\mathbf{q}}}[\mathbf{p}(t)\dot{\mathbf{q}}-\mathcal{L}(\mathbf{q}(t),\dot{\mathbf{q}}(t),t)].$$

事实上, 令$M(\mathbf{p},\dot{\mathbf{q}})=\mathbf{p}(t)\dot{\mathbf{q}}-\mathcal{L}(\mathbf{q}(t),\dot{\mathbf{q}}(t),t)$, 则为了求关于$\dot{\mathbf{q}}$的极大值必需设定$M(\mathbf{p},\dot{\mathbf{q}})$ 关于$\dot{\mathbf{q}}$的一阶偏导数为零并且其二阶偏导数小于零(这一点可由$\mathcal{L}$的凸性保证, 即$\frac{\partial^2\mathcal{L}}{\partial\dot{\mathbf{q}}^2}>0$), 从而当$\mathbf{p}(t)=\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\mathbf{q}}}(\mathbf{q}(t),\dot{\mathbf{q}}(t),t)$ 时, $M(\mathbf{p},\dot{\mathbf{q}})$达到极大值, 即

$$\begin{cases}\mathbf{p}(t)=\dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\mathbf{q}}}(\mathbf{q}(t),\dot{\mathbf{q}}(t),t),\\ \mathcal{H}(\mathbf{q}(t),\mathbf{p}(t),t)=\mathbf{p}(t)\dot{\mathbf{q}}-\mathcal{L}(\mathbf{q}(t),\dot{\mathbf{q}}(t),t),\end{cases}$$

这里的$\mathcal{H}$称为Hamilton量. 由第二个方程即得

$$\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\mathbf{q}}=-\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\mathbf{q}},\quad \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\mathbf{p}}=\dot{\mathbf{q}}.$$

由此Euler-Lagrange方程(7.1.3)可以写成

$$\begin{cases}\dot{\mathbf{p}}=-\dfrac{\partial\mathcal{H}}{\partial\mathbf{q}},\\[2mm] \dot{\mathbf{q}}=\dfrac{\partial\mathcal{H}}{\partial\mathbf{p}},\end{cases}\tag{7.1.4}$$

此方程称为Hamilton方程, 这是一个由$2n$个关于$(\mathbf{p}(t),\mathbf{q}(t))$的一阶方程组成的方程组. 记$\mathbf{u}(t)=(\mathbf{p}(t),\mathbf{q}(t))\in\mathbb{R}^{2n}$, $\mathcal{H}_{\mathbf{u}}=(\mathcal{H}_{\mathbf{p}},\mathcal{H}_{\mathbf{q}})$以及矩阵

$$\mathbb{J}=\begin{bmatrix}\mathbf{0} & -\mathbb{I}\\ \mathbb{I} & \mathbf{0}\end{bmatrix},$$

则(7.1.4)可以写成[2]

$$\dot{\mathbf{u}}=\mathbb{J}\,\mathcal{H}_{\mathbf{u}}.\tag{7.1.5}$$

注意到$\mathbb{J}^2=-\mathbb{I}$并且Hamilton方程定义在偶数维空间上, 这表明我们可以将其推广到复数的情形.

设$(x,y)\in\mathbb{R}^2$, 令$z=x+iy$, $\bar{z}=x-iy$, $i^2=-1$. 定义$\partial_z=\frac{1}{2}(\partial_x-i\partial_y)$和$\partial_{\bar{z}}=\frac{1}{2}(\partial_x+i\partial_y)$. 容易看出$\partial_z z=\partial_{\bar{z}}\bar{z}=1$, $\partial_z\bar{z}=\partial_{\bar{z}}z=0$, 即$\bar{z}$与$z$是相互独立的变量. 令$\mathbf{z}=\mathbf{q}+i\mathbf{p}$, 则由(7.1.4)可得

$$\dot{\mathbf{z}}=\dot{\mathbf{q}}+i\dot{\mathbf{p}}=-i(\mathcal{H}_{\mathbf{q}}+i\mathcal{H}_{\mathbf{p}})=-2i\mathcal{H}_{\bar{\mathbf{z}}}.$$

[2]注意在计算时, 将行向量$\mathbf{u}$及$\mathcal{H}_{\mathbf{u}}$写成列向量再进行计算.

我们来看一个例子, 设I是一时间区间, $u:\mathbb{R}^n\times I\mapsto\mathbb{C}$, u及其导数光滑且在无穷远处为零, 令Hamilton量为

$$\mathcal{H}=\mathcal{H}[u,\bar{u}]=\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}}|\nabla u|^2dx=\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}}\nabla u\nabla\bar{u}dx.$$

由变分法易得

$$\lim_{\tau\to 0}\frac{\mathcal{H}[u,\bar{u}+\tau\bar{v}]-\mathcal{H}[u,\bar{u}]}{\tau}=\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}}(-\Delta u)\bar{v}dx=\frac{1}{2}\langle-\Delta u,v\rangle.$$

即$\mathcal{H}_{\bar{u}}[u,\bar{u}]=-\frac{1}{2}\Delta u$, 从而相应的Hamilton方程为

$$\dot{u}=-2i\mathcal{H}_{\bar{u}}=i\Delta u,$$

这恰恰就是线性Schrödinger方程.

现在, 我们来考虑n维非线性Schrödinger方程

$$iu_t+\Delta u=F'(|u|^2)u. \tag{7.1.6}$$

假设u及其导数光滑且当$|x|\to\infty$时趋于零, $F'(\cdot)$是一个实值光滑函数, 并记

$$F(\lambda)=\int_0^\lambda F'(s)ds.$$

定义

$$\mathcal{L}=\mathcal{L}(u,\bar{u},u_t,\bar{u}_t,\nabla u,\nabla\bar{u})=\frac{i}{2}(\bar{u}u_t-u\bar{u}_t)-[|\nabla u|^2+F(|u|^2)], \tag{7.1.7}$$

及作用量泛函

$$\mathcal{I}[u]=\int_{t_0}^{t_1}\int_{\mathbb{R}^n}\mathcal{L}\,dxdt,\quad \forall u\in\mathcal{A}=\{\text{某个容许函数集}\}. \tag{7.1.8}$$

由变分原理知, 若u为$\mathcal{I}(\cdot)$的光滑临界点, 则u必须满足相应的Euler-Lagrange方程

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u}-\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_t u)}-\sum_{j=1}^n\frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_{x_j}u)}=0. \tag{7.1.9}$$

将(7.1.7)代入上式,并取复数共轭即得(7.1.6).

现在, 我们给出Nöther定理的另一表述:

定理 7.1.1 (Nöther**定理**). 若变分问题在一族变换作用下保持不变, 则相应的Euler-Lagrange方程的解满足一个守恒律.

在此, 主要考虑单参数变换族的情形并将Nöther定理应用到非线性Schrödinger方程(7.1.6). 为了方便, 引进记号$\xi = (t,x) = (\xi_0, \xi_1, \cdots, \xi_n)$, $\partial_0 = \partial_t$, $\partial = (\partial_t, \nabla_x) = (\partial_0, \partial_1, \cdots, \partial_n)$, 及$\mathbf{u} = (u_1, u_2) = (u, \bar{u})$, 并记积分区域为$\mathcal{D} := [t_0, t_1] \times \mathbb{R}^n$. 考虑单参数变换群$T^\varepsilon$:

$$\xi \mapsto \tilde{\xi}(\xi, \mathbf{u}, \varepsilon), \quad \mathbf{u} \mapsto \tilde{\mathbf{u}}(\xi, \mathbf{u}, \varepsilon), \tag{7.1.10}$$

其中假设$\tilde{\xi}$及$\tilde{\mathbf{u}}$关于ε可微, 且当$\varepsilon = 0$时该变换退化成恒等变换. 取ε无穷小, 记

$$\tilde{\xi} = \xi + \delta\xi, \quad \tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{u} + \delta\mathbf{u}, \tag{7.1.11}$$

其中$\delta\xi$和$\delta\mathbf{u}$都是关于$(\xi, \mathbf{u}, \varepsilon)$的函数, 当$\varepsilon \to 0$时, $\delta\xi = O(\varepsilon)$和$\delta\mathbf{u} = O(\varepsilon)$亦趋于零, 并且Jacobi行列式$\frac{\partial(\tilde{\xi}_0, \cdots, \tilde{\xi}_n)}{\partial(\xi_0, \cdots, \xi_n)} = 1 + \sum_{j=0}^n \frac{\partial(\delta\xi)_j}{\partial\xi_j} + o(\varepsilon)$. 经$T^\varepsilon$作用后, $\mathbf{u}(\xi)$变换为$\tilde{\mathbf{u}}(\tilde{\xi})$, 区域$\mathcal{D}$变为$\tilde{\mathcal{D}}$, 作用量泛函

$$\mathcal{I}[u] = \int_{\mathcal{D}} \mathcal{L}(\mathbf{u}, \partial\mathbf{u}) d\xi \tag{7.1.12}$$

变为

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{I}}[\tilde{u}] &= \int_{\tilde{\mathcal{D}}} \mathcal{L}(\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\partial}\tilde{\mathbf{u}}) d\tilde{\xi} = \int_{\mathcal{D}} \mathcal{L}(\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\partial}\tilde{\mathbf{u}}) \left(1 + \sum_{j=0}^n \frac{\partial(\delta\xi)_j}{\partial\xi_j} + o(\varepsilon)\right) d\xi \\ &= \int_{\mathcal{D}} \mathcal{L}(\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\partial}\tilde{\mathbf{u}}) d\xi + \int_{\mathcal{D}} \mathcal{L}(\mathbf{u}, \partial\mathbf{u}) \sum_{j=0}^n \frac{\partial(\delta\xi)_j}{\partial\xi_j} d\xi + o(\varepsilon), \end{aligned} \tag{7.1.13}$$

这里∂是关于ξ的微分, $\tilde{\partial}$是关于$\tilde{\xi}$的微分, 上式中的最后两项是用(7.1.7)将其展开并将ε的高阶项归入$o(\varepsilon)$中而得到的. 我们只考虑那些使$\mathcal{I}$保持不变的变换. 记

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{I} :=& \tilde{\mathcal{I}}[\tilde{u}] - \mathcal{I}[u] \\ =& \int_{\mathcal{D}} \left[\mathcal{L}(\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\partial}\tilde{\mathbf{u}}) - \mathcal{L}(\mathbf{u}, \partial\mathbf{u})\right] d\xi + \int_{\mathcal{D}} \mathcal{L}(\mathbf{u}, \partial\mathbf{u}) \sum_{j=0}^n \frac{\partial(\delta\xi)_j}{\partial\xi_j} d\xi + o(\varepsilon). \end{aligned} \tag{7.1.14}$$

其中第一项可写为

$$\mathcal{L}(\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\partial}\tilde{\mathbf{u}}) - \mathcal{L}(\mathbf{u}, \partial\mathbf{u})$$

$$=\sum_{k=1}^{2}\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_k}(\tilde{u}_k(\tilde{\xi})-u_k(\xi))+\sum_{j=0}^{n}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_j u_k)}\left(\tilde{\partial}_j\tilde{u}_k(\tilde{\xi})-\partial_j u_k(\xi)\right)\right]. \quad (7.1.15)$$

记

$$\delta\tilde{u}_k\equiv\tilde{u}_k(\tilde{\xi})-u_k(\xi)=\sum_{j=0}^{n}\partial_j u_k(\delta\xi)_j+\delta u_k(\xi). \quad (7.1.16)$$

由于

$$\begin{aligned}\partial_j\tilde{u}_k(\tilde{\xi})&=\sum_{l=0}^{n}\tilde{\partial}_l\tilde{u}_k(\tilde{\xi})\frac{\partial\tilde{\xi}_l}{\partial\xi_j}=\sum_{l=0}^{n}(\delta_{jl}+\frac{\partial(\delta\xi)_l}{\partial\xi_j})\tilde{\partial}_l\tilde{u}_k(\tilde{\xi})\\&=\left(\tilde{\partial}_j+\sum_{l=0}^{n}\frac{\partial(\delta\xi)_l}{\partial\xi_j}\tilde{\partial}_l\right)\tilde{u}_k(\tilde{\xi}),\end{aligned} \quad (7.1.17)$$

故

$$\begin{aligned}\tilde{\partial}_j\tilde{u}_k(\tilde{\xi})-\partial_j u_k(\xi)=&(\tilde{\partial}_j-\partial_j)\tilde{u}_k(\tilde{\xi})+\partial_j(\tilde{u}_k(\tilde{\xi})-u_k(\xi))\\=&-\sum_{l=0}^{n}\frac{\partial(\delta\xi)_l}{\partial\xi_j}\tilde{\partial}_l\tilde{u}_k(\tilde{\xi})+\partial_j\left(\sum_{l=0}^{n}\partial_l u_k(\delta\xi)_l+\delta u_k\right).\end{aligned} \quad (7.1.18)$$

从而有

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(\tilde{\mathbf{u}},\tilde{\partial}\tilde{\mathbf{u}})-\mathcal{L}(\mathbf{u},\partial\mathbf{u})=&\sum_{k=1}^{2}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_k}\left(\sum_{j=0}^{n}\partial_j u_k(\delta\xi)_j+\delta u_k\right)\\&+\sum_{k=1}^{2}\sum_{j=0}^{n}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_j u_k)}\left[-\sum_{l=0}^{n}\frac{\partial(\delta\xi)_l}{\partial\xi_j}\tilde{\partial}_l\tilde{u}_k(\tilde{\xi})+\partial_j\left(\sum_{l=0}^{n}\partial_l u_k(\delta\xi)_l+\delta u_k\right)\right].\end{aligned} \quad (7.1.19)$$

注意到

$$\frac{\partial}{\partial\xi_j}(\mathcal{L}(\delta\xi)_j)=\mathcal{L}\frac{\partial(\delta\xi)_j}{\partial\xi_j}+\sum_{k=1}^{2}\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_k}\partial_j u_k+\sum_{l=0}^{n}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_l u_k)}\partial_{lj}^2 u_k\right](\delta\xi)_j, \quad (7.1.20)$$

和

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_j u_k)}\partial_j\delta u_k=\frac{\partial}{\partial\xi_j}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_j u_k)}\delta u_k\right)-\frac{\partial}{\partial\xi_j}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_j u_k)}\right)\delta u_k, \quad (7.1.21)$$

容易得到

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(\tilde{\mathbf{u}},\tilde{\partial}\tilde{\mathbf{u}})-\mathcal{L}(\mathbf{u},\partial\mathbf{u})=&\sum_{j=0}^{n}\frac{\partial}{\partial\xi_j}(\mathcal{L}(\delta\xi)_j)-\sum_{j=0}^{n}\mathcal{L}\frac{\partial(\delta\xi)_j}{\partial\xi_j}+\sum_{k=1}^{2}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_k}\delta u_k\\&+\sum_{k=1}^{2}\sum_{j=0}^{n}\left[\frac{\partial}{\partial\xi_j}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_j u_k)}\delta u_k\right)-\frac{\partial}{\partial\xi_j}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_j u_k)}\right)\delta u_k\right]\\&-\sum_{k=1}^{2}\sum_{j=0}^{n}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_j u_k)}\sum_{l=0}^{n}\frac{\partial(\delta\xi)_l}{\partial\xi_j}(\tilde{\partial}_l\tilde{u}_k(\tilde{\xi})-\partial_l u_k).\qquad(7.1.22)\end{aligned}$$

从而有

$$\begin{aligned}\delta\mathcal{I}=&\int_{\mathcal{D}}\sum_{k=1}^{2}\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_k}-\sum_{j=0}^{n}\frac{\partial}{\partial\xi_j}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_j u_k)}\right)\right]\delta u_k d\xi\\&+\int_{\mathcal{D}}\sum_{j=0}^{n}\frac{\partial}{\partial\xi_j}\left(\mathcal{L}(\delta\xi)_j+\sum_{k=1}^{2}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_j u_k)}\delta u_k\right)d\xi+o(\varepsilon).\qquad(7.1.23)\end{aligned}$$

由(7.1.9)可得

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_k}-\sum_{j=0}^{n}\frac{\partial}{\partial\xi_j}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_j u_k)}\right)=0,\quad k=1,2.\qquad(7.1.24)$$

由$\mathcal{D}$的任意性, 要想$\mathcal{I}$在无穷小变换T^ε作用下保持不变, 则必有下面的结果.

定理 7.1.2. 令$\xi=(t,x_1,\cdots,x_n)$, $\mathbf{u}=(u_1,u_2)$. 若作用量泛函(7.1.12)在无穷小变换T^ε: $\xi\mapsto\tilde{\xi}(\xi,\mathbf{u},\varepsilon)$, $\mathbf{u}\mapsto\tilde{\mathbf{u}}(\xi,\mathbf{u},\varepsilon)$作用下保持不变, 则以下守恒律成立:

$$\sum_{j=0}^{n}\frac{\partial}{\partial\xi_j}\left(\mathcal{L}(\delta\xi)_j+\sum_{k=1}^{2}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_j u_k)}\delta u_k\right)=0,\qquad(7.1.25)$$

其中$\delta u_k(\xi)=\tilde{u}_k(\tilde{\xi})-u_k(\xi)-\nabla_\xi u_k\cdot\delta\xi$.

对空间变量积分可以得到以下结论.

定理 7.1.3. 若作用量泛函(7.1.12)在无穷小变换

$$t\mapsto\tilde{t}=t+\delta t(t,x,u),\qquad(7.1.26)$$

$$x\mapsto\tilde{x}=x+\delta x(t,x,u),\qquad(7.1.27)$$

$$u(t,x) \mapsto \tilde{u}(\tilde{t},\tilde{x}) = u(t,x) + \delta u(t,x) \tag{7.1.28}$$

作用下保持不变, 则

$$\int_{\mathbb{R}^n} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_t}(u_t\delta t + \nabla u \cdot \delta x - \delta u) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{u}_t}(\bar{u}_t \delta t + \nabla \bar{u} \cdot \delta x - \delta \bar{u}) - \mathcal{L}\delta t \right] dx$$

为守恒量. 对于非线性Schrödinger方程而言, $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_t} = \frac{i}{2}\bar{u}$, $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{u}_t} = -\frac{i}{2}u$, 从而

$$\int_{\mathbb{R}^n} \left[\frac{i}{2}\bar{u}(u_t\delta t + \nabla u \cdot \delta x - \delta u) - \frac{i}{2}u(\bar{u}_t \delta t + \nabla \bar{u} \cdot \delta x - \delta \bar{u}) - \mathcal{L}\delta t \right] dx \tag{7.1.29}$$

守恒.

§7.1.2 不变量与守恒律

本小节考虑非线性Schrödinger方程满足的一些不变量及其相应的守恒律.

(i) 相移变换: $\tilde{u} = e^{i\varepsilon}u$, 对于无穷小量$\varepsilon$有$\delta u = i\varepsilon u$, $\delta t = 0$, $\delta x = 0$. 由(7.1.29)即得质量守恒(或称电荷守恒, 或L^2-范数守恒)

$$N(t) := \int_{\mathbb{R}^n} |u(t,x)|^2 dx = \text{常数}. \tag{7.1.30}$$

(ii) 时间平移变换: $t \mapsto t + \delta t$, $\delta x = 0$, $\delta u = \delta \bar{u} = 0$, 其中$\delta t$为一不依赖于$(t,x,u,\bar{u})$的无穷小量. 由(7.1.29)及(7.1.7)可得能量守恒

$$H(t) := \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u(t,x)|^2 + F(|u(t,x)|^2) dx = \text{常数}. \tag{7.1.31}$$

(iii) 空间平移变换: $x \mapsto x + \delta x$, $\delta t = \delta u = \delta \bar{u} = 0$, 其中$\delta x$为一不依赖于$(t,x,u,\bar{u})$的无穷小向量. 由(7.1.29)即得动量守恒

$$\vec{P}(t) := i\int_{\mathbb{R}^n} (u(t,x)\nabla \bar{u}(t,x) - \bar{u}(t,x)\nabla u(t,x)) dx = \text{常向量}. \tag{7.1.32}$$

(iv) Galilean变换:

$$\begin{cases} x \mapsto \tilde{x} = x - \vec{c}t, \\ t \mapsto \tilde{t} = t, \\ u \mapsto \tilde{u}(\tilde{t},\tilde{x}) = e^{-i[\frac{1}{2}\vec{c}\cdot\tilde{x} + \frac{1}{4}|\vec{c}|^2\tilde{t}]} u(\tilde{t}, \tilde{x} + \vec{c}\tilde{t}), \end{cases} \tag{7.1.33}$$

即对无穷小速度$\vec{c}$, 有

$$\delta t = 0, \quad \delta x = -\vec{c}t, \quad \delta u = -\frac{i}{2}\vec{c}\cdot x u(t,x).$$

由(7.1.29)即得正规化质心守恒

$$\int_{\mathbb{R}^n} x|u(t,x)|^2 dx - t\vec{P}(t) = \text{常向量}. \tag{7.1.34}$$

(v) 伪共形变换:

$$\begin{cases} x \mapsto \tilde{x} = \dfrac{x}{\ell(t)}, \\ t \mapsto \tilde{t} = \displaystyle\int_0^t \frac{1}{\ell^2(\tau)} d\tau, \\ u \mapsto \tilde{u}(\tilde{t},\tilde{x}) = \ell^{n/2} u(t,x) \exp(-i\dfrac{\ell_t}{\ell}\dfrac{|x|^2}{4}). \end{cases} \tag{7.1.35}$$

假设$\ell_{tt} = 0$且$F'(|\tilde{u}|^2) = \ell^2 F'(|u|^2)$, 则该伪共形变换保持方程不变. 取$\varepsilon \in (0, 1/|t|)$为一无穷小量, $\ell(t) = 1 - \varepsilon t$, 则$\delta x = \varepsilon t x$, $\delta t = \varepsilon t^2$, $\delta u = \varepsilon(-\frac{n}{2}t + \frac{i}{4}|x|^2)u$. 由(7.1.29)即得伪共形守恒律

$$\int_{\mathbb{R}^n} \left[|xu + 2it\nabla u|^2 + 4t^2 F(|u|^2)\right] dx = \text{常数}. \tag{7.1.36}$$

注记7.1.4. 1) 实际上, $x + 2it\nabla$是Galilean算子, 它与$i\partial_t + \Delta$是可交换的. 定义$J(t) = x + 2it\nabla$, $M(t) = e^{\frac{|x|^2}{4it}}$, 则$J(t)$与Schrödinger半群$S(t) = e^{it\Delta}$及$M(t)$之间有下面的关系:

$$J(t) = S(-t)xS(t), \quad J(t)u = 2itM(-t)\nabla(M(t)u).$$

2) 对于一般的非线性项$F'(|u|^2)u$, 可以通过对(7.1.36)关于时间t求导而得到, 即有

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}^n} \left[|xu + 2it\nabla u|^2 + 4t^2 F(|u|^2)\right] dx \\ =&4t\int_{\mathbb{R}^n} \left[(n+2)F(|u|^2) - nF'(|u|^2)|u|^2\right] dx, \end{aligned} \tag{7.1.37}$$

亦即对解存在的时间区间中的任意时刻t, 均有下面的伪共形守恒律成立

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}^n} \left[|xu + 2it\nabla u|^2 + 4t^2 F(|u|^2)\right] dx \\ =&\int_{\mathbb{R}^n} |xu(0,x)|^2 dx + 4\int_0^t \tau \int_{\mathbb{R}^n} \left[(n+2)F(|u|^2) - nF'(|u|^2)|u|^2\right] dx d\tau. \end{aligned} \tag{7.1.38}$$

§7.1.3　Virial等式及Morawetz估计

在上一小节的守恒律中出现了$|u|^2$, $x|u|^2$, $|x|^2|u|^2$, $\cdots$, 这会不会有某种规律可循呢, 如果将$|u|^2$前的系数换成一般函数会产生什么结果? 会不会得到一些其他的守恒律或估计式呢? 为此, 令$a(t,x)$为$\mathbb{R}^{1+n}$上的任意一个实值函数, 定义相应于a的Virial位势$V_a(t)$和Morawetz作用量$M_a(t)$分别为

$$V_a(t) := \int_{\mathbb{R}^n} a(t,x)|u(t,x)|^2 dx, \quad M_a(t) := \partial_t V_a(t).$$

为了方便, 记$G(|u|^2) = F'(|u|^2)|u|^2 - F(|u|^2)$. 由方程(7.1.6)及分部积分可得

$$M_a(t) = \partial_t V_a(t) = \int_{\mathbb{R}^n} \left[a_t|u|^2 + 2\mathrm{Im}(\bar{u}\nabla a \cdot \nabla u)\right] dx, \tag{7.1.39}$$

$$\begin{aligned}\partial_t M_a(t) = \partial_{tt} V_a(t) = &\int_{\mathbb{R}^n} (a_{tt} - \Delta^2 a)|u|^2 dx \\ &+ 4\int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{Im}(\bar{u}\nabla a_t \cdot \nabla u) dx \\ &+ 4\int_{\mathbb{R}^n} \sum_{j,k=1}^n a_{jk}\mathrm{Re}(u_k\bar{u}_j) dx \\ &+ 2\int_{\mathbb{R}^n} \Delta a G(|u|^2) dx.\end{aligned} \tag{7.1.40}$$

当a不依赖于t时, 即$a(t,x) = a(x)$时有

$$\begin{aligned}\partial_{tt} V_a(t) = &-\int_{\mathbb{R}^n} \Delta^2 a|u|^2 dx + 4\int_{\mathbb{R}^n} \sum_{j,k=1}^n a_{jk}\mathrm{Re}(u_k\bar{u}_j) dx \\ &+ 2\int_{\mathbb{R}^n} \Delta a G(|u|^2) dx.\end{aligned} \tag{7.1.41}$$

注意到当a依赖于时间t时, 即$a(t,x) \neq a(x)$, 对任意正值函数$Q = Q(t,x)$有

$$4\mathrm{Im}(\bar{u}\nabla a_t \cdot \nabla u) = |Q^{-1}(\nabla a_t)u - 2iQ\nabla u|^2 - Q^{-2}|\nabla a_t|^2|u|^2 - 4Q^2|\nabla u|^2.$$

故此时有

$$\begin{aligned}\partial_{tt} V_a(t) = &\int_{\mathbb{R}^n} (a_{tt} - \Delta^2 a - Q^{-2}|\nabla a_t|^2)|u|^2 dx \\ &+ \int_{\mathbb{R}^n} |Q^{-1}(\nabla a_t)u - 2iQ\nabla u|^2 dx \\ &+ 4\int_{\mathbb{R}^n} \sum_{j,k=1}^n (a_{jk} - Q^2\delta_{jk})\mathrm{Re}(u_k\bar{u}_j) dx\end{aligned}$$

$$+2\int_{\mathbb{R}^n}\Delta aG(|u|^2)dx. \tag{7.1.42}$$

从而问题就转变成了选函数Q和a使得上式有尽可能多的非负项. 下面我们来看一些具体的例子.

例7.1.5 (Virial等式). 取$a(t,x)=|x|^2$, 则$a_{jk}=2\delta_{jk}$, $\Delta^2 a=0$, 代入(7.1.41)即有*Virial*等式

$$\partial_{tt}\int_{\mathbb{R}^n}|x|^2|u|^2dx=8n\int_{\mathbb{R}^n}|\nabla u|^2dx+4n\int_{\mathbb{R}^n}G(|u|^2)dx.$$

对幂函数非线性项, 如非聚焦情形$F(|u|^2)=\frac{2}{p+1}|u|^{p+1}$, 即$G(|u|^2)=\frac{p-1}{p+1}|u|^{p+1}$, 表示$\int_{\mathbb{R}^n}|x|^2|u|^2dx$的凸性可由能量来控制(其中$p>1$); 而对聚焦情形$F(|u|^2)=-\frac{2}{p+1}|u|^{p+1}$, 即$G(|u|^2)=-\frac{p-1}{p+1}|u|^{p+1}$, 表示$\partial_{tt}\int_{\mathbb{R}^n}|x|^2|u|^2dx$的上界可由能量来控制(其中$p\geqslant 1+\frac{4}{n}$), 若能量为负值且$\int_{\mathbb{R}^n}|x|^2|u|^2dx$有限, 则方程的解在有限时间必发生爆破.

例7.1.6 (Morawetz估计). 取$a(t,x)=|x|$, 令$n>1$, 则$\nabla a=\frac{x}{|x|}$, $a_{jk}=\frac{\delta_{jk}}{|x|}-\frac{x_jx_k}{|x|^3}$, $\Delta a=\frac{n-1}{|x|}$, 代入(7.1.39)和(7.1.41)可得

$$\begin{aligned}M_a(t)=&2\int_{\mathbb{R}^n}\mathrm{Im}(\bar u\frac{x}{|x|}\cdot\nabla u)dx,\\ \partial_tM_a(t)=&-(n-1)\int_{\mathbb{R}^n}(\Delta\frac{1}{|x|})|u|^2dx+4\int_{\mathbb{R}^n}\frac{|\nabla\!\!\!/_0u|^2}{|x|}dx\\ &+2(n-1)\int_{\mathbb{R}^n}\frac{G(|u|^2)}{|x|}dx,\end{aligned}$$

其中

$$|\nabla\!\!\!/_yu|^2:=|\nabla u|^2-|\frac{x-y}{|x-y|}\cdot\nabla u|^2.$$

在三维情形$n=3$, 有$\Delta(\frac{1}{|x|})=-4\pi\delta$, 故

$$\partial_tM_a(t)=8\pi|u(t,0)|^2+4\int_{\mathbb{R}^3}\frac{|\nabla\!\!\!/_0u|^2+G(|u|^2)}{|x|}dx,$$

关于时间t在$[T_*,T^*]$上积分可得下列Morawetz等式

$$2\int_{T_*}^{T^*}\int_{\mathbb{R}^3}\frac{|\nabla\!\!\!/_0u|^2+G(|u|^2)}{|x|}dxdt+4\pi\int_{T_*}^{T^*}|u(t,0)|^2dt$$

$$= \int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{Im}(\bar{u}(T^*, x)\frac{x}{|x|} \cdot \nabla u(T^*, x))dx - \int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{Im}(\bar{u}(T_*, x)\frac{x}{|x|} \cdot \nabla u(T_*, x))dx.$$

对三维非聚焦情形, 即有下列Morawetz估计

$$\begin{aligned}&\int_{T_*}^{T^*}\int_{\mathbb{R}^3} \frac{|\nabla\!\!\!/_0 u|^2 + G(|u|^2)}{|x|}dxdt + 2\pi\int_{T_*}^{T^*} |u(t,0)|^2 dt\\ \lesssim& \sup_{T_*\leqslant t\leqslant T^*} \|u(t)\|^2_{\dot{H}^{1/2}}.\end{aligned} \tag{7.1.43}$$

此种估计对散射理论的证明起着重要作用.

对于更高维($n \geqslant 4$)非聚焦情形, $-\Delta(\frac{1}{|x|}) = \frac{(n-3)}{|x|^3} > 0$, 从而有类似的Morawetz估计

$$\begin{aligned}&(n-1)(n-3)\int_{T_*}^{T^*}\int_{\mathbb{R}^n}\frac{|u|^2}{|x|^3}dxdt + 4\int_{T_*}^{T^*}\int_{\mathbb{R}^n}\frac{|\nabla\!\!\!/_0 u|^2}{|x|}dxdt\\ &\quad + 2(n-1)\int_{T_*}^{T^*}\int_{\mathbb{R}^n}\frac{G(|u|^2)}{|x|}dxdt\\ \lesssim& \sup_{T_*\leqslant t\leqslant T^*} \|u(t)\|^2_{\dot{H}^{1/2}}.\end{aligned} \tag{7.1.44}$$

另外, 对于低维$n = 1, 2$的情形就没有这么简单的结果了, 与高维情形相比要复杂得多.

例7.1.7 (Nakanishi-Morawetz**估计**). 取$a(t, x) = \lambda := |(t, x)| = \sqrt{t^2 + |x|^2}$, 则

$$\begin{aligned}a_t =&\frac{t}{\lambda},\quad a_j = \frac{x_j}{\lambda},\quad a_{tj} = -\frac{tx_j}{\lambda^3},\quad a_{tt} = \frac{|x|^2}{\lambda^3},\\ a_{jk} =&\frac{\delta_{jk}t^2}{\lambda^3} + \frac{\delta_{jk}|x|^2 - x_j x_k}{\lambda^3},\qquad \Delta a = \frac{n}{\lambda} - \frac{|x|^2}{\lambda^3} = \frac{n-1}{\lambda} + \frac{t^2}{\lambda^3}.\end{aligned}$$

将它们代入(7.1.39)和(7.1.42)可得

$$\begin{aligned}M_a(t) =& \int_{\mathbb{R}^n}\left[\frac{t}{\lambda}|u|^2 + 2\mathrm{Im}(\bar{u}\frac{x}{\lambda}\cdot\nabla u)\right]dx,\\ \partial_t M_a(t) =& \int_{\mathbb{R}^n}(\frac{|x|^2}{\lambda^3} - \Delta^2 a - \frac{t^2|x|^2}{\lambda^6 Q^2})|u|^2 dx\\ &+ \int_{\mathbb{R}^n}|-\frac{tx}{Q\lambda^3}u - 2iQ\nabla u|^2 dx\\ &+ 4\int_{\mathbb{R}^n}(\frac{t^2}{\lambda^3} - Q^2)|\nabla u|^2 + \frac{|\nabla\!\!\!/_0 u|^2|x|^2}{\lambda^3}dx\end{aligned}$$

$$+ 2\int_{\mathbb{R}^n} \Delta a G(|u|^2)dx.$$

取$Q^2 := \frac{t^2}{\lambda^3}$, 则会消去一些项, 上式可以简化为

$$\partial_t M_a(t) = -\int_{\mathbb{R}^n} \Delta^2 a|u|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|xu+2it\nabla u|^2}{\lambda^3}dx + 4\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|\nabla\!\!\!/_0 u|^2|x|^2}{\lambda^3}dx$$
$$+ 2\int_{\mathbb{R}^n}(\frac{n-1}{\lambda} + \frac{t^2}{\lambda^3})G(|u|^2)dx.$$

注意到$\Delta^2 a = O(\lambda^{-3})$, 故对于$G(|u|^2) \geqslant 0$的情形有

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|xu+2it\nabla u|^2}{\lambda^3}dx + 4\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|\nabla\!\!\!/_0 u|^2|x|^2}{\lambda^3}dx$$
$$+ 2\int_{\mathbb{R}^n} \frac{t^2 G(|u|^2)}{\lambda^3}dx$$
$$\lesssim \partial_t M_a(t) + \int_{\mathbb{R}^n} O(\lambda^{-3})|u|^2 dx.$$

关于时间t在$(1,T]$($[-T,-1)$的情况可类似处理)上积分可得

$$\int_1^T\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|xu+2it\nabla u|^2}{\lambda^3}dxdt + 4\int_1^T\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|\nabla\!\!\!/_0 u|^2|x|^2}{\lambda^3}dxdt$$
$$+ 2\int_1^T\int_{\mathbb{R}^n} \frac{t^2 G(|u|^2)}{\lambda^3}dxdt$$
$$\lesssim M_a(T) - M_a(1) + \int_1^T\int_{\mathbb{R}^n} O(\lambda^{-3})|u|^2 dxdt$$
$$\lesssim C(E(0), N(0)) + \int_1^T\int_{\mathbb{R}^n} O(\lambda^{-3})|u|^2 dxdt,$$

其中$H(t)$, $N(t)$分别为前面定义的能量和L^2范数. 当$|t| > 1$时有

$$\int_{|t|>1}\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|u|^2}{\lambda^3}dxdt \lesssim \int_{|t|>1}\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|u|^2}{|t|^3}dxdt \lesssim N(0).$$

令$T \to \infty$, 有

$$\int_{|t|>1}\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|xu+2it\nabla u|^2}{\lambda^3}dxdt + 4\int_{|t|>1}\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|\nabla\!\!\!/_0 u|^2|x|^2}{\lambda^3}dxdt$$
$$+ 2\int_{|t|>1}\int_{\mathbb{R}^n} \frac{t^2 G(|u|^2)}{\lambda^3}dxdt$$
$$\lesssim C(E(0), N(0)).$$

特别地, 若$F(|u|^2)=\frac{2}{p+1}|u|^{p+1}$, 且当$n=1,2$时$p\in(1,\infty)$, 当$n\geqslant 3$时$p\in(1,1+\frac{4}{n-2})$, 则$F'(|u|^2)|u|^2-F(|u|^2)=\frac{p-1}{p+1}|u|^{p+1}$. 由上面的估计即得

$$\int_{|t|>1}\int_{\mathbb{R}^n}\frac{t^2|u|^{p+1}}{|(t,x)|^3}dxdt\lesssim C(E(0),N(0)). \tag{7.1.45}$$

对于$|t|\leqslant 1$的部分, 我们分两种情况进行考虑. 对$|x|>1$的情形, 有

$$\iint_{\substack{|t|\leqslant 1\\|x|>1}}\frac{t^2|u|^{p+1}}{|(t,x)|^3}dxdt\lesssim\iint_{\substack{|t|\leqslant 1\\|x|>1}}|u|^{p+1}dxdt\lesssim C(E(0),N(0)). \tag{7.1.46}$$

对$|x|\leqslant 1$的情形, 有

$$\begin{aligned}&\iint_{\substack{|t|\leqslant 1\\|x|\leqslant 1}}\frac{t^2|u|^{p+1}}{|(t,x)|^3}dxdt\lesssim\iint_{\substack{|t|\leqslant 1\\|x|\leqslant 1}}\frac{|u|^{p+1}}{|(t,x)|}dxdt\lesssim\iint_{\substack{|t|\leqslant 1\\|x|\leqslant 1}}\frac{|u|^{p+1}}{|t|^{1-(p+1)\varepsilon}|x|^{(p+1)\varepsilon}}dxdt\\&\lesssim\int_{|t|\leqslant 1}\frac{\||x|^{-\varepsilon}u\|^{p+1}_{L^{p+1}(|x|\leqslant 1)}}{|t|^{1-(p+1)\varepsilon}}dt\lesssim\int_{-1}^{1}\frac{1}{|t|^{1-(p+1)\varepsilon}}\|u\|^{p+1}_{H^1(|x|\leqslant 1)}dt\\&\lesssim C(E(0),N(0)).\end{aligned} \tag{7.1.47}$$

这里, 我们用到了下面的Hardy不等式

$$\||x|^{-\varepsilon}u\|_{L^q(|x|\leqslant 1)}\leqslant C\|u\|_{H^1},\quad \forall 2\leqslant q<2^*. \tag{7.1.48}$$

其中$2^*:=\begin{cases}2n/(n-2), & n\geqslant 3,\\ \infty, & n\leqslant 2,\end{cases}$ $0<\varepsilon<\begin{cases}n/q-n/2^*, & n\neq 2,\\ n/2q, & n=2.\end{cases}$ 事实上, 对于$n\neq 2$的情形, 由Hölder不等式可得

$$\begin{aligned}\||x|^{-\varepsilon}u\|_{L^q(|x|\leqslant 1)}\leqslant&\||x|^{-\varepsilon}\|_{L^{q2^*/(2^*-q)}(|x|\leqslant 1)}\|u\|_{L^{2^*}(|x|\leqslant 1))}\\\leqslant&C\left(\int_0^1 r^{-\varepsilon\frac{q2^*}{2^*-q}+n-1}dr\right)^{\frac{2^*-q}{q2^*}}\|u\|_{L^{2^*}(|x|\leqslant 1))}\\\leqslant&C\|u\|_{H^1}.\end{aligned}$$

对于$n=2$的情形, 由Hölder不等式可得

$$\begin{aligned}\||x|^{-\varepsilon}u\|_{L^q(|x|\leqslant 1)}\leqslant&\||x|^{-\varepsilon}\|_{L^{2q}(|x|\leqslant 1)}\|u\|_{L^{2q}(|x|\leqslant 1))}\\\leqslant&C\left(\int_0^1 r^{-2q\varepsilon+n-1}dr\right)^{1/2q}\|u\|_{L^{2q}(|x|\leqslant 1))}\\\leqslant&C\|u\|_{H^1}.\end{aligned}$$

由(7.1.45), (7.1.45)及(7.1.45)可得Nakanishi-Morawetz估计

$$\int_{\mathbb{R}^{1+n}}\frac{t^2|u|^{p+1}}{|(t,x)|^3}dxdt\lesssim C(E(0),N(0)),\quad\forall n\in\mathbb{N}. \tag{7.1.49}$$

§7.1.4 Morawetz相互作用估计

令$a(x)$为$\mathbb{R}^n$上任一实值函数, 相应于a的Virial相互作用位势$V^a(t)$和Morawetz相互作用量$M^a(t)$分别定义为

$$V^a(t) := \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} a(x-y)|u(t,x)|^2|u(t,y)|^2 dxdy, \quad M^a(t) := \partial_t V^a(t).$$

由方程(7.1.6)及分部积分可得

$$\begin{aligned} M_a(t) = 2\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} \nabla a(x-y)\cdot \Big[&\mathrm{Im}(\nabla u(t,x)\bar{u}(t,x))|u(t,y)|^2 \\ &- \mathrm{Im}(\nabla u(t,y)\bar{u}(t,y))|u(t,x)|^2\Big] dxdy, \end{aligned} \tag{7.1.50}$$

$$\begin{aligned} &\partial_t M_a(t) \\ =& -2\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} \Delta^2 a(x-y)|u(t,x)|^2|u(t,y)|^2 dxdy \\ &+ 2\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} \Delta a(x-y)[G(|u(t,x)|^2)|u(t,y)|^2 + G(|u(t,y)|^2)|u(t,x)|^2] dxdy \\ &+ 4\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n}\sum_{j,k=1}^n a_{jk}(x-y)\Big[\mathrm{Re}(u_k(t,x)\bar{u}_j(t,x))|u(t,y)|^2 \\ &\qquad + \mathrm{Re}(u_k(t,y)\bar{u}_j(t,y))|u(t,x)|^2 \\ &\qquad - \mathrm{Im}(u_k(t,y)\bar{u}(t,y))\mathrm{Im}(u_j(t,x)\bar{u}(t,x)) \\ &\qquad - \mathrm{Im}(u_k(t,x)\bar{u}(t,x))\mathrm{Im}(u_j(t,y)\bar{u}(t,y))\Big] dxdy. \end{aligned} \tag{7.1.51}$$

令

$$\begin{aligned} A_j(t,x,y) &:= u(t,x)\bar{u}_j(t,y) + u_j(t,x)\bar{u}(t,y), \\ B_j(t,x,y) &:= u(t,x)u_j(t,y) + u_j(t,x)u(t,y), \end{aligned}$$

则可简化上式中的最后一个积分, 因$a_{jk} = a_{kj}$, 故必要时可以交换k与j, 即可简化为

$$2\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n}\sum_{j,k=1}^n a_{jk}(x-y)[A_j(t,x,y)\overline{A_k(t,x,y)} + B_j(t,x,y)\overline{B_k(t,x,y)}] dxdy.$$

为方便, 记上式为I. 若取a为径向函数, 即$a(x) = a(|x|)$, 则$a_{jk}(x) = \frac{a'(|x|)}{|x|}\delta_{jk} + (a''(|x|) - \frac{a'(|x|)}{|x|})\frac{x_k}{|x|}\frac{x_j}{|x|}$. 从而利用Cauchy-Schwartz不等式可得

$$I = 2\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} \frac{a'(|x-y|)}{|x-y|}\sum_{j=1}^n [|A_j(t,x,y)|^2 + |B_j(t,x,y)|^2] dxdy$$

$$
\begin{aligned}
&+2\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n}(a''(|x-y|)-\frac{a'(|x-y|)}{|x-y|})\Big[\Big|\sum_{j=1}^n\frac{x_j-y_j}{|x-y|}A_j(t,x,y)\Big|^2\\
&\qquad\qquad+\Big|\sum_{j=1}^n\frac{x_j-y_j}{|x-y|}B_j(t,x,y)\Big|^2\Big]dxdy\\
\geqslant&2\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n}a''(|x-y|)\Big[\Big|\sum_{j=1}^n\frac{x_j-y_j}{|x-y|}A_j(t,x,y)\Big|^2\\
&\qquad\qquad+\Big|\sum_{j=1}^n\frac{x_j-y_j}{|x-y|}B_j(t,x,y)\Big|^2\Big]dxdy.
\end{aligned}
$$

由上式看出, 若对$\lambda\geqslant 0$有$a''(\lambda)\geqslant 0$, 则$I\geqslant 0$. 故由(7.1.51)和(7.1.50)即得

定理 7.1.8 (Morawetz相互作用估计). 设$a(x)$为实值径向凸函数, $u(t,x)$为方程(7.1.6) 的一个解, 则有

$$
\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n}(-\Delta^2a(x-y))|u(t,x)|^2|u(t,y)|^2dxdy\\
&+\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n}\Delta a(x-y)[G(|u(t,x)|^2)|u(t,y)|^2+G(|u(t,y)|^2)|u(t,x)|^2]dxdy\\
\leqslant&\frac{1}{2}\partial_tM_a(t),
\end{aligned}\tag{7.1.52}
$$

其中$M_a(t)$如(7.1.50)中所定义.

下面来看一个三维情形的例子.

例7.1.9 (三维NLS方程的Morawetz相互作用估计). 令$n=3$, $a(x)=|x|$, 则$\nabla a=\frac{x}{|x|}$, $\Delta a=\frac{2}{|x|}>0$, $-\Delta^2a=8\pi\delta(x)$. 由(7.1.52)可得

$$
\begin{aligned}
&8\pi\int_{T_*}^{T^*}\int_{\mathbb{R}^3}|u(t,x)|^4dxdt\\
&+2\int_{T_*}^{T^*}\int_{\mathbb{R}^3}\int_{\mathbb{R}^3}\frac{G(|u(t,x)|^2)|u(t,y)|^2+G(|u(t,y)|^2)|u(t,x)|^2}{|x-y|}dxdydt\\
\leqslant&\frac{1}{2}(M_a(T^*)-M_a(T_*))\\
=&\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n}\Big[\mathrm{Im}(\frac{x-y}{|x-y|}\cdot\nabla u(T^*,x)\bar{u}(T^*,x))|u(T^*,y)|^2\\
&\qquad-\mathrm{Im}(\frac{x-y}{|x-y|}\cdot\nabla u(T^*,y)\bar{u}(T^*,y))|u(T^*,x)|^2\Big]dxdy\\
&-\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n}\Big[\mathrm{Im}(\frac{x-y}{|x-y|}\cdot\nabla u(T_*,x)\bar{u}(T_*,x))|u(T_*,y)|^2
\end{aligned}
$$

$$- \operatorname{Im}\Big(\frac{x-y}{|x-y|}\cdot\nabla u(T_*,y)\bar{u}(T_*,y)\Big)|u(T_*,x)|^2\Big]dxdy$$
$$\lesssim N^2(0)\sup_{T_*\leqslant t\leqslant T^*}\|u(t)\|^2_{\dot{H}^{\frac12}}. \tag{7.1.53}$$

§7.2 次临界非线性Schrödinger方程的散射算子

§7.2.1 散射算子和Strichartz估计

本节中, 我们给出下列非聚焦NLS方程

$$iu_t+\Delta u=|u|^{p-1}u,\qquad 1+4/n<p<1+4/(n-2),\quad n\geqslant 3, \tag{7.2.1}$$

的散射算子在能量空间H^1中的存在性. 我们先以NLS方程(7.2.1)为例给出散射算子的定义.

定义7.2.1. 设X为一Banach空间, $S(t)=e^{it\Delta}$为相应于(7.2.1)的算子半群, $u(t)$为具有初始值$u_0\in X$的NLS方程(7.2.1)的整体解, 若极限

$$u_+=\lim_{t\to\infty}S(-t)u(t)$$

在X中存在, 则称u_+为u_0在$+\infty$处的渐近态. 若极限

$$u_-=\lim_{t\to-\infty}S(-t)u(t)$$

在X中存在, 则称u_-为u_0在$-\infty$处的渐近态. 也就是说, $u(t)$与线性Schrödinger方程(也称自由Schrödinger方程, 即$iu_t+\Delta u=0$)的解$S(t)u_\pm$在$\pm\infty$处的渐近行为相一致. 称算子$U_\pm: u_0\mapsto u_\pm$的逆算子$\Omega_\pm=U_\pm^{-1}$为正(负)向波算子. 若正负波算子同时存在, 则称映射$\mathbf{S}=\Omega_+^{-1}\circ\Omega_-: u_-\mapsto u_+$为散射算子.

注记7.2.2. 散射性理论涉及到以下两个要素:正负波算子的存在性和渐近完备性. 一般来说, 只要幂指数p不太小也不太大, 不管是聚焦情形还是非聚焦情形前者相对来说更容易建立, 而后者即便是非聚焦情形也会有一定的难度, 而且还需要一些衰减估计.

一般情况下, 研究Schrödinger方程(7.2.1)的适定性和散射理论通常采用其积分形式来进行研究, 即Duhamel公式

$$u(t)=S(t-t_0)u(t_0)-i\int_{t_0}^{t}S(t-\tau)(|u(\tau)|^{p-1}u(\tau))d\tau. \tag{7.2.2}$$

就方程(7.2.1)在H^1中的散射理论而言, 即对于具初值$u(0)=u_0\in H^1$的方程(7.2.1)的H^1-整体强解$u(t)$是否在H^1中散射到线性方程的某个解$S(t)u_+$, 即是否有

$$\|u(t)-S(t)u_+\|_{H^1}\to 0,\quad 当t\to+\infty,$$

或等价地

$$\|S(-t)u(t)-u_+\|_{H^1}\to 0,\quad 当t\to+\infty.$$

换言之, 也就是要求函数$S(-t)u(t)$当$t\to+\infty$时在H^1中收敛. 由Duhamel公式(7.2.2) 可得

$$S(-t)u(t)=u_0-i\int_0^t S(-\tau)(|u(\tau)|^{p-1}u(\tau))d\tau.$$

因此, 当$t\to+\infty$时u在H^1中散射的充要条件就是积分

$$\int_0^\infty S(-\tau)(|u(\tau)|^{p-1}u(\tau))d\tau \tag{7.2.3}$$

在H^1中条件收敛, 从而渐近态u_+可由下式给出

$$u_+=u_0-i\int_0^\infty S(-\tau)(|u(\tau)|^{p-1}u(\tau))d\tau. \tag{7.2.4}$$

这样可以将渐近态u_+看作是初始态u_0的一个非线性扰动. 由(7.2.2)和(7.2.4)消去u_0可得

$$u(t)=S(t)u_++i\int_t^\infty S(t-\tau)(|u(\tau)|^{p-1}u(\tau))d\tau, \tag{7.2.5}$$

可以看作(7.2.2)的极限情形$t_0=+\infty$. 对于$t\to-\infty$的情形有类似的结果, 在此就不再重复了.

现在, 我们来回顾一下第二章中的Schrödinger方程的Strichartz估计, 即在定理 3.2.6中$m=2$的情形. 若 $2\leqslant q,r\leqslant\infty$, $\frac{1}{q}=\frac{n}{2}(\frac{1}{2}-\frac{1}{r})$ 且 $(q,r,n)\neq(2,\infty,2)$, 则称(q,r)为Schrödinger容许对. 对任意时间区间I, 定义Strichartz空间$S^0(I\times\mathbb{R}^n)$为在以下范数

$$\|u\|_{S^0(I\times\mathbb{R}^n)}:=\sup_{(q,r)为容许对}\|u\|_{L_t^qL_x^r(I\times\mathbb{R}^n)} \tag{7.2.6}$$

意义下Schwartz函数的闭包. 特别地, S^0范数可以控制$L_t^\infty L_x^2$范数. 可以验证空间$S^0(I\times\mathbb{R}^n)$在范数(7.2.6)意义下为一Banach空间, 记其对偶空间为$N^0(I\times$

$\mathbb{R}^n) := S^0(I\times\mathbb{R}^n)'$, 由空间的构造知对任意的Schrödinger容许对(q,r), 只要$\|f\|_{L_t^{q'}L_x^{r'}(I\times\mathbb{R}^n)}$有限就有

$$\|f\|_{N^0(I\times\mathbb{R}^n)}\leqslant\|f\|_{L_t^{q'}L_x^{r'}(I\times\mathbb{R}^n)}$$

成立. 由此, Strichartz估计(3.2.22)-(3.2.23)可以写成一个一致估计, 即对$t_0\in I$及$iu_t+\Delta u=f$, 有

$$\|u\|_{S^0(I\times\mathbb{R}^n)}\lesssim_n\|u(t_0)\|_{L_x^2(I\times\mathbb{R}^n)}+\|f\|_{N^0(I\times\mathbb{R}^n)}. \tag{7.2.7}$$

当然, 对于其它正则性也有类似的结果. 比如对于H^1, 可以定义

$$\|u\|_{S^1(I\times\mathbb{R}^n)}:=\|u\|_{S^0(I\times\mathbb{R}^n)}+\|\nabla u\|_{S^0(I\times\mathbb{R}^n)},$$
$$\|u\|_{N^1(I\times\mathbb{R}^n)}:=\|u\|_{N^0(I\times\mathbb{R}^n)}+\|\nabla u\|_{N^0(I\times\mathbb{R}^n)}.$$

由于Schrödinger方程与导数可交换, 故由(7.2.7)可得

$$\|u\|_{S^1(I\times\mathbb{R}^n)}\lesssim_n\|u(t_0)\|_{H_x^1(\mathbb{R}^n)}+\|f\|_{N^1(I\times\mathbb{R}^n)}. \tag{7.2.8}$$

§7.2.2 波算子的存在性

首先, 我们给出波算子的存在性定理.

定理 7.2.3 (波算子的存在性). *设$n\geqslant 3$和$p\in(1+\frac{4}{n},1+\frac{4}{n-2})$, 则波算子$\Omega_+:H^1\to H^1$存在唯一且连续.*

证明. 为构造波算子Ω_+, 需要解一个从$t=+\infty$到$t=0$的方程. 为此, 我们将此问题分解成两个问题来解:

1) 渐近问题, 即从$t=+\infty$到一有限时间$t=T>0$;

2) 局部问题, 即从$t=T$到 $t=0$.

先来看第一个问题. 取定$u_+\in H^1$并设$\|u_+\|_{H^1}\leqslant A$, $A>0$为一常数. 由Strichartz估计(7.2.8)可得

$$\|S(t)u_+\|_{S^1(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n)}\lesssim_A 1.$$

我们不但想要这个范数有界, 而且想通过改变时间区间的大小来控制该范数的大小. 但是我们知道S^1范数包含有L_t^∞这样的估计, 所以我们的想法对S^1是行

不通的. 要实现我们的想法, 就必须去掉这些含有L_t^∞的估计或找一个更小的范数来代替S^1范数. 为此, 我们选择范数

$$\|u\|_{\mathcal{S}_0} := \|u\|_{L_{t,x}^{\frac{(n+2)(p-1)}{2}}} + \|u\|_{L_t^{2+\frac{4}{n}} H^1_{2+\frac{4}{n}}}.$$

由Sobolev嵌入定理可得[3]

$$\begin{aligned}\|S(t)u_+\|_{\mathcal{S}_0(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n)} &\lesssim \|S(t)u_+\|_{L_t^{\frac{(n+2)(p-1)}{2}} H^1_{\frac{2n(n+2)(p-1)}{n(n+2)(p-1)-8}}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n)} \\ &\quad + \|S(t)u_+\|_{L_t^{2+\frac{4}{n}} H^1_{2+\frac{4}{n}}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n)} \\ &\lesssim \|S(t)u_+\|_{S^1(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n)} \\ &\lesssim_A 1.\end{aligned}$$

令$\varepsilon > 0$为一非常小的待定常数, 取$T = T(u_+)$充分大使得

$$\|S(t)u_+\|_{\mathcal{S}_0([T,+\infty)\times\mathbb{R}^n)} \leqslant \varepsilon.$$

下面我们就用Banach不动点定理来求解(7.2.5). 定义空间

$$E = \{u \in \mathcal{S}_0([T,+\infty)\times\mathbb{R}^n) : \|u\|_{\mathcal{S}_0([T,+\infty)\times\mathbb{R}^n)} \leqslant 2\varepsilon\},$$

及度量

$$d(u,v) = \|u-v\|_{\mathcal{S}_0([T,+\infty)\times\mathbb{R}^n)},$$

容易验证(E,d)为一Banach空间.

定义映射$\mathscr{T}$:

$$\mathscr{T}u = S(t)u_+ + i\int_t^\infty S(t-\tau)(|u(\tau)|^{p-1}u(\tau))d\tau. \tag{7.2.9}$$

任意给定$u \in E$, 则有

$$\|\mathscr{T}u\|_{\mathcal{S}_0([T,+\infty)\times\mathbb{R}^n)} \leqslant \varepsilon + C\||u|^{p-1}u\|_{L_t^{\frac{2n+4}{4}} H^1_{\frac{2n+4}{4}}([T,+\infty)\times\mathbb{R}^n)}$$

$$\leqslant \varepsilon + C\|u\|^{p-1}_{L_{t,x}^{\frac{(n+2)(p-1)}{2}}([T,+\infty)\times\mathbb{R}^n)} \|u\|_{L_t^{2+\frac{4}{n}} H^1_{2+\frac{4}{n}}([T,+\infty)\times\mathbb{R}^n)}$$

[3]这里用到了$\left(\frac{(n+2)(p-1)}{2}, \frac{2n(n+2)(p-1)}{n(n+2)(p-1)-8}\right)$为容许对, 并且有嵌入关系$H^1_{\frac{2n(n+2)(p-1)}{n(n+2)(p-1)-8}}(\mathbb{R}^n) \subset L^{\frac{(n+2)(p-1)}{2}}(\mathbb{R}^n)$, 其中$p$必须满足条件$1+\frac{4}{n} \leqslant p \leqslant 1+\frac{4}{n-2}$.

$$\leqslant \varepsilon + C\|u\|^p_{\mathcal{S}_0([T,+\infty)\times\mathbb{R}^n)}$$
$$\leqslant \varepsilon + C(2\varepsilon)^p.$$

若取$\varepsilon > 0$充分小使得$C2^p\varepsilon^{p-1} \leqslant 1$, 则有$\|\mathscr{T}u\|_{\mathcal{S}_0([T,+\infty)\times\mathbb{R}^n)} \leqslant 2\varepsilon$即$\mathscr{T}u \in E$.

任意给定u, $v \in E$, 则

$$\begin{aligned} d(\mathscr{T}u, \mathscr{T}v) \leqslant & C\||u|^{p-1}u - |v|^{p-1}v\|_{L_t^{\frac{2n+4}{4}} H^1_{\frac{2n+4}{4}}([T,+\infty)\times\mathbb{R}^n)} \\ \leqslant & C[\|u\|^{p-1}_{\mathcal{S}_0([T,+\infty)\times\mathbb{R}^n)} + \|v\|^{p-1}_{\mathcal{S}_0([T,+\infty)\times\mathbb{R}^n)}]d(u,v) \\ \leqslant & 2C(2\varepsilon)^{p-1}d(u,v). \end{aligned}$$

取$\varepsilon > 0$充分小使得$C2^p\varepsilon^{p-1} \leqslant \frac{1}{2}$, 则$d(\mathscr{T}u, \mathscr{T}v) \leqslant \frac{1}{2}d(u,v)$, 即$\mathscr{T}$为压缩映射. 由Banach不动点定理知$\mathscr{T}$存在唯一一个不动点$u \in E$, 在$[T,+\infty)$上满足方程(7.2.5). 由该方程及Strichartz估计即得$u \in S^1([T,\infty) \times \mathbb{R}^n)$, 从而$u \in \mathcal{C}([T,\infty); H^1(\mathbb{R}^n))$. 特别地, $u_T = u(T) \in H^1(\mathbb{R}^n)$. 注意到

$$u(t+T) = S(t)u_T - i\int_0^t S(t-\tau)(|u(\tau+T)|^{p-1}u(\tau+T))d\tau.$$

因此, u是如下问题

$$\begin{cases} iu_t + \Delta u = |u|^{p-1}u, \\ u(T) = u_T, \end{cases}$$

的解.

现在来看第二个问题, 即求解从$t = T$到$t = 0$的局部问题, 写成积分形式即为

$$u(t) = S(t-T)u_T + i\int_t^T S(t-\tau)(|u(\tau)|^{p-1}u(\tau))d\tau.$$

设$\lambda > 0$为一待定常数, 先来证明在$[T-\lambda, T]$上的存在性. 令$C > 0$为Strichartz估计中的常系数, 重新定义空间

$$E = \{u \in S^1([T-\lambda, T] \times \mathbb{R}^n) : \|u\|_{S^1([T-\lambda,T]\times\mathbb{R}^n)} \leqslant 2C\|u_T\|_{H^1}\},$$

及度量

$$d(u,v) = \|u - v\|_{S^1([T-\lambda,T]\times\mathbb{R}^n)}.$$

重新定义映射$\mathscr{T}$

$$\mathscr{T}u(t)=S(t-T)u_T+i\int_t^T S(t-\tau)(|u(\tau)|^{p-1}u(\tau))d\tau.$$

令$\alpha=\frac{1}{2}-\frac{n-2}{2(n+2)}p>0$,[4] 对任意给定$u\in E$, 有

$$\begin{aligned}
&\|\mathscr{T}u\|_{S^1([T-\lambda,T]\times\mathbb{R}^n)}\lesssim\|u_T\|_{H^1}+\||u|^{p-1}u\|_{N^1([T-\lambda,T]\times\mathbb{R}^n)}\\
\lesssim&\|u_T\|_{H^1}+\||u|^{p-1}u\|_{L_t^2H^1_{\frac{2n}{n+2}}([T-\lambda,T]\times\mathbb{R}^n)}\\
\lesssim&\|u_T\|_{H^1}+\lambda^\alpha\|u\|^{p-1}_{L_t^{\frac{2(n+2)}{n-2}}L_x^{\frac{n+2}{2}(p-1)}([T-\lambda,T]\times\mathbb{R}^n)}\|u\|_{L_t^{\frac{2(n+2)}{n-2}}H^1_{\frac{2n(n+2)}{n^2+4}}([T-\lambda,T]\times\mathbb{R}^n)}\\
\lesssim&\|u_T\|_{H^1}+\lambda^\alpha\|u\|^{p}_{L_t^{\frac{2(n+2)}{n-2}}H^1_{\frac{2n(n+2)}{n^2+4}}([T-\lambda,T]\times\mathbb{R}^n)}\\
\leqslant&C\|u_T\|_{H^1}+C\lambda^\alpha(2C\|u_T\|_{H^1})^p.
\end{aligned}$$

取$\lambda>0$充分小使得$2C\lambda^\alpha(2C\|u_T\|_{H^1})^{p-1}<1$, 则有$\|\mathscr{T}u\|_{S^1([T-\lambda,T]\times\mathbb{R}^n)}\leqslant 2C\|u_T\|_{H^1}$, 即$\mathscr{T}u\in E$.

任意给定u, $v\in E$, 同样有

$$\begin{aligned}
d(\mathscr{T}u,\mathscr{T}v)\leqslant&C\lambda^\alpha(\|u\|^{p-1}_{S^1([T-\lambda,T]\times\mathbb{R}^n)}+\|v\|^{p-1}_{S^1([T-\lambda,T]\times\mathbb{R}^n)})d(u,v)\\
\leqslant&2C\lambda^\alpha(2C\|u_T\|_{H^1})^{p-1}d(u,v).
\end{aligned}$$

取$\lambda>0$充分小使得$2C\lambda^\alpha(2C\|u_T\|_{H^1})^{p-1}<\frac{1}{2}$, 则有$d(\mathscr{T}u,\mathscr{T}v)\leqslant\frac{1}{2}d(u,v)$, 即$\mathscr{T}$为压缩映射. 由Banach不动点定理知$\mathscr{T}$存在唯一一个不动点$u\in E$, 在$[T-\lambda,T]$上满足方程(7.2.5).

由能量守恒

$$H(t):=\|\nabla u(t)\|^2_{L^2}+\frac{1}{p+1}\|u(t)\|^{p+1}_{L^{p+1}}=E(0)$$

和质量守恒

$$N(t):=\|u(t)\|^2_{L^2}=N(0)$$

以及Sobolev嵌入定理可知, $\|u_T\|_{H^1}\sim E(0)+N(0)$. 故上面$\lambda$的取值可与$T$无关, 从而可以将$u(T-\lambda)\in H^1$作为终点继续将解延拓到$[T-2\lambda,T-\lambda],\cdots$, 一直延拓到包含0的时间区间且$u\in S^1([0,\infty)\times\mathbb{R}^n)$, 特别地, $u\in\mathcal{C}([0,\infty);H^1(\mathbb{R}^n))$.

[4] 此处要求$p<1+\frac{4}{n-2}$.

如此u在$t=0$可以取到某个函数$u_0=u(0)\in H^1$. 另外, 不难证明当$t\to+\infty$时有$\|S(-t)u(t)-u_+\|_{H^1}\to 0$. 因此, 波算子$\Omega_+: H^1\to H^1$存在, 即$\Omega_+(u_+)=u_0$. 其连续性可由前面渐近问题和局部问题的迭代格式而得到.

下证波算子的唯一性. 假设$u_0^{(1)}$, $u_0^{(2)}\in H^1(\mathbb{R}^n)$, 令$u_1$和$u_2$分别为具初值$u(0)=u_0^{(1)}$和$u(0)=u_0^{(2)}$的方程(7.2.1)的解, 并假设当$t\to+\infty$时对$j=1,2$均有$\|S(-t)u(t)-u_+\|_{H^1}\to 0$. 显然, u_j亦为(7.2.5)的解, 从而由前面的证明知$u_i\in S^1([0,\infty)\times\mathbb{R}^n)$. 类似于渐近问题的讨论, 容易得到当$t$充分大时$u_1(t)=u_2(t)$. 由初值问题解的唯一性即得$u_0^{(1)}=u_0^{(2)}$. 因此, 波算子$\Omega_+$是唯一的. □

注记7.2.4. 从上面的讨论可以看出, 求解一个从$t=+\infty$的渐近态到一个大时间$t=T$的渐近问题要比求解一个从T到$t=0$的局部问题要简单得多. 前者甚至没有用到能量守恒和质量守恒, 就连非线性项的非聚焦符号也未用到. 这说明在$t\to+\infty$的渐近过程中,渐近态非常分散以致于非线性效应极其微弱. 只有在时间T及之前的时间内才考虑非线性项对解的影响.

§7.2.3 渐近完备性

接下来, 我们将渐近完备性的证明分成三部分. 先证明某整体时空估计蕴含着渐近完备性, 再证明该估计可由某个较弱的时空估计而得到, 最后来证明这个较弱的整体时空估计.

定理 7.2.5 (**整体时空估计蕴含着渐近完备性**)**.** 设$n\geqslant 3$和$p\in(1+\frac{4}{n},1+\frac{4}{n-2})$. 如果具初值$u(0)=u_0\in H^1(\mathbb{R}^n)$的方程(7.2.1)的初值问题的解$u$ 满足整体时空估计

$$\|u\|_{S^1(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n)}\lesssim_{\|u_0\|_{H^1}} 1, \tag{7.2.10}$$

那么波算子Ω_+是从H^1到H^1的满射, 并且它的逆Ω_+^{-1}连续.

证明. 这里只证明波算子是满射, 将其逆算子的连续性的证明留给读者. 对任意的$u_0\in H^1$, 用前面解决局部问题的方法可以很容易地得到具初值$u(0)=u_0$的方程(7.2.1)的整体解$u\in S^1(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n)$. 要证该解在$H^1$中散射, 只需证明积分(7.2.3)在$H^1$中条件收敛. 由Strichartz估计知, 只需证明$|u|^{p-1}u\in N^1(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n)$. 事实上, 由Leibnitz公式、Hölder不等式、Sobolev嵌入以及(7.2.10)可得

$$\||u|^{p-1}u\|_{N^1(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n)}\lesssim\|u\|^{p-1}_{L_{t,x}^{\frac{(n+2)(p-1)}{2}}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n)}\|u\|_{L_t^{2+\frac{4}{n}}H^1_{2+\frac{4}{n}}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n)}$$

$$\lesssim \|u\|_{S^1(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n)}^p \lesssim_{\|u_0\|_{H^1}} 1.$$

从而, 渐近态u_+可由(7.2.4)给出, 即

$$u_+ = u_0 - i\int_0^\infty S(-\tau)(|u(\tau)|^{p-1}u(\tau))d\tau.$$

因此, 存在$u_+ \in H^1$使得$\Omega_+(u_+) = u_0$, 即Ω_+为满射. □

定理 7.2.6 (弱整体时空估计蕴含着强整体时空估计). 设$n \geqslant 3$和$p \in (1+\frac{4}{n}, 1+\frac{4}{n-2})$. 如果具初值$u(0) = u_0 \in H^1(\mathbb{R}^n)$的方程(7.2.1)的初值问题的解$u$ 满足整体时空估计: 对某个$q \in [2+\frac{4}{n}, 2+\frac{8}{n-2}]$, 有

$$\|u\|_{L^q_{t,x}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n)} \lesssim_{\|u_0\|_{H^1}} 1, \tag{7.2.11}$$

那么(7.2.10)成立.

证明. 令$\eta = \eta(\|u_0\|_{H^1}) > 0$为一非常小的待定常数. 由(7.2.14), 可以将时间轴$\mathbb{R}$分成一些小的区间I使得在每个小区间上

$$\eta/2 \leqslant \|u\|_{L^q_{t,x}(I\times\mathbb{R}^n)} \leqslant \eta. \tag{7.2.12}$$

显然, 这些小区间的个数为有限个, 即$O_{\eta,q,\|u_0\|_{H^1}}(1)$个. 取定一个$I$, 记$I = [t_0, t_1]$, 由Strichartz估计(7.2.8)、能量守恒、Leibnitz公式及Hölder不等式可得

$$\begin{aligned}\|u\|_{S^1(I\times\mathbb{R}^n)} \lesssim& \|u(t_0)\|_{H^1_x(\mathbb{R}^n)} + \||u|^{p-1}u\|_{N^1(I\times\mathbb{R}^n)}\\ \lesssim& O_{\|u_0\|_{H^1}}(1) + \|u\|^{p-1}_{L_{t,x}^{\frac{(n+2)(p-1)}{2}}(I\times\mathbb{R}^n)}\|u\|_{L_t^{2+\frac{4}{n}}H^1_{2+\frac{4}{n}}(I\times\mathbb{R}^n)}\\ \lesssim& O_{\|u_0\|_{H^1}}(1) + \|u\|^{p-1}_{L_{t,x}^{\frac{(n+2)(p-1)}{2}}(I\times\mathbb{R}^n)}\|u\|_{S^1(I\times\mathbb{R}^n)}\end{aligned}$$

由S^1的定义及Sobolev嵌入可知, 对任意的$r \in [2+\frac{4}{n}, 2+\frac{8}{n-2}]$有

$$\|u\|_{L^r_{t,x}(I\times\mathbb{R}^n)} \lesssim \|u\|_{S^1(I\times\mathbb{R}^n)}.$$

将此式与(7.2.12)作插值可得, 存在$0 < \beta = \beta(q) < 1$使得

$$\|u\|_{L_{t,x}^{\frac{(n+2)(p-1)}{2}}(I\times\mathbb{R}^n)} \lesssim \eta^\beta \|u\|^{1-\beta}_{S^1(I\times\mathbb{R}^n)}.$$

从而

$$\|u\|_{S^1(I\times\mathbb{R}^n)} \leqslant C(\|u_0\|_{H^1}) + C\eta^{(p-1)\beta}\|u\|^{(p-1)(1-\beta)+1}_{S^1(I\times\mathbb{R}^n)}.$$

由Bootstrap原理可得

$$\|u\|_{S^1(I\times\mathbb{R}^n)}=O_{\|u\|_{H^1}}1.$$

将所有的(有限个)时间区间累加即得(7.2.10). □

接下来, 就是要证(7.2.14), 这也是证明散射理论的主要部分. 在某些特殊情况下, 比如球对称解的情形和三维情形, 此估计的证明相对简单一些.

例7.2.7 (**球对称解的整体时空估计**$(n\geqslant 3)$). 对于球对称解的情形, 可以利用我们前面推导出的Morawetz估计(7.1.43)和(7.1.44)及质量、能量守恒, 即有

$$\int_{\mathbb{R}^{1+n}}\frac{|u|^{p+1}}{|x|}dxdt\lesssim_{\|u_0\|_{H^1}}1,\quad \forall n\geqslant 3. \tag{7.2.13}$$

再结合径向Sobolev不等式[?, pp. 344–345]

$$\||x|^s|u|\|_{L^\infty_x(\mathbb{R}^n)}\lesssim_{n,s}\|u\|_{H^1(\mathbb{R}^n)},\quad \forall s\in[(n-2)/2,(n-1)/2],\ \forall n\geqslant 3,$$

及Hölder不等式即得

$$\begin{aligned}\|u\|^{p+\frac{n}{n-2}}_{L^{p+\frac{n}{n-2}}_{t,x}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n)}&\lesssim\||x|^{-1}|u|^{p+1}\|_{L^1_{t,x}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n)}\||x|^{\frac{n-2}{2}}|u|\|^{\frac{2}{n-2}}_{L^\infty_{t,x}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n)}\\&\lesssim_{\|u_0\|_{H^1}}1.\end{aligned}$$

因此, 对球对称解, 我们有

$$\|u\|_{L^{p+\frac{n}{n-2}}_{t,x}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n)}\lesssim_{\|u_0\|_{H^1}}1.$$

就一般的解而言, 就没有这么直接的结果了, 其解可能随着空间位置的变化而变化. 借助于空间的平移不变性, 我们有一些好的估计, 特别在三维情形可以找到所要的整体时空估计.

例7.2.8 (**三维情形**). 对于三维一般形式解的情形, 由Morawetz相互作用估计(7.1.53)可得

$$\|u\|_{L^4_{t,x}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3)}\lesssim_{\|u_0\|_{H^1}}1,$$

并且满足条件$4\in[10/3,10]$.

现在, 我们从尺度变换的角度用归纳法给出一个证明. 也就是要证所有的有限能量解满足整体时空估计(7.2.14). 注意, 这里所说的能量是指守恒量$E(u(t)) := N(t) + H(t)$或等价的$\|u\|_{L_t^\infty(\mathbb{R};H_x^1(\mathbb{R}^n))}$. 对能量用归纳法, 首先验证小能量($\|u\|_{L_t^\infty(\mathbb{R};H_x^1(\mathbb{R}^n))} \leqslant \varepsilon$)可以导出此整体时空估计, 然后假设对$\|u\|_{L_t^\infty(\mathbb{R};H_x^1(\mathbb{R}^n))} \leqslant E-\delta$ (其中$\delta > 0$)有(7.2.14) 成立, 再证明当$\|u\|_{L_t^\infty(\mathbb{R};H_x^1(\mathbb{R}^n))} \leqslant E$时(7.2.14)也成立.

为了方便, 记$q := \frac{(n+2)}{2}(p-1)$, $\rho := 2 + \frac{4}{n}$. 现在先来看第一步.

引理7.2.9 (小能量蕴含着整体时空估计). *令u为方程(7.2.1)具有初值$u(0) = u_0$的解, 则存在$0 < \varepsilon \ll 1$使得当$\|u_0\|_{H_x^1(\mathbb{R}^n)} \leqslant \varepsilon$时, 有*

$$\|u\|_{L_{t,x}^q(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n)} \lesssim_{\|u_0\|_{H^1}} 1.$$

证明. 由Strichartz估计可得

$$\begin{aligned}\|u\|_{S^1(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n)} &\lesssim \|u_0\|_{H^1(\mathbb{R}^n)} + \||u|^{p-1}u\|_{N^1(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n)}\\ &\lesssim \|u_0\|_{H^1} + \|u\|_{L_{t,x}^q(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n)}^{p-1}\|u\|_{S^1(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n)}.\end{aligned}$$

对$\sigma > 0$有Sobolev嵌入关系$H^1 \subset H^{1-\sigma} \subset B_{2,\infty}^{1-\sigma} \subset B_{\infty,\infty}^{1-n/2-\sigma}$, 再由$H_\rho^1 \subset B_{\rho,\rho}^1$及Sobolev 插值$(B_{\rho,\rho}^1, B_{\infty,\infty}^{1-n/2-\sigma})_{1-\rho/q,q} = B_{q,q}^{s^*} \subset L^q$ (其中选$\sigma > 0$使得$s^* = \rho/q + (1-\rho/q)(1-n/2-\sigma) > 0$)可得

$$\|u\|_{L_x^q(\mathbb{R}^n)} \lesssim \|u\|_{B_{\rho,\rho}^1(\mathbb{R}^n)}^{\rho/q}\|u\|_{B_{\infty,\infty}^{1-n/2-\sigma}(\mathbb{R}^n)}^{1-\rho/q} \lesssim \|u\|_{H_\rho^1(\mathbb{R}^n)}^{\rho/q}\|u\|_{H^1(\mathbb{R}^n)}^{1-\rho/q}.$$

故有$\|u\|_{L_{t,x}^q(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n)} \lesssim \|u\|_{S^1(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n)}^{\rho/q}\|u_0\|_{H_x^1(\mathbb{R}^n)}^{1-\rho/q}$. 因此

$$\|u\|_{S^1(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n)} \lesssim \|u_0\|_{H^1(\mathbb{R}^n)} + \|u_0\|_{H^1(\mathbb{R}^n)}^{p-1-4/n}\|u\|_{S^1(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n)}^{1+4/n}.$$

由连续性方法或Bootstrap原理即得当$\|u_0\|_{H^1}$充分小时, $\|u\|_{S^1(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n)} \lesssim_{\|u_0\|_{H^1}} 1$. 从而, $\|u\|_{L_{t,x}^q(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n)} \lesssim_{\|u_0\|_{H^1}} 1$. □

令$0 < \delta < E/2$, 现假设对任意的$u_0 \in H^1(\mathbb{R}^n)$, 当$\|u_0\|_{H^1(\mathbb{R}^n)} \leqslant E-\delta$时, 有$\|u\|_{L_{t,x}^q(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n)} \lesssim_{\|u_0\|_{H^1}} 1$成立. 现证"若$\|u_0\|_{H^1(\mathbb{R}^n)} \leqslant E$, 则$\|u\|_{L_{t,x}^q(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n)} \lesssim_{\|u_0\|_{H^1}} 1$也成立".

注意到方程(7.2.1)具有尺度变换不变性, 即若$u(t,x)$为方程(7.2.1)具有初值$u_0(x)$的解, 则对任意的$\lambda > 0$, $u^\lambda(t,x) := \lambda^{-2/(p-1)}u(t/\lambda^2, x/\lambda)$为方程(7.2.1)具有初值$u_0^\lambda(x) := \lambda^{-2/(p-1)}u_0(x/\lambda)$的解. 并且对任意的$s \geqslant 0$ 有

$$\|u_0^\lambda\|_{\dot{H}^s(\mathbb{R}^n)} = \lambda^{\frac{n}{2}-\frac{2}{p-1}-s}\|u_0\|_{\dot{H}^s(\mathbb{R}^n)}.$$

从而有

$$\|u_0^\lambda\|_{H^1(\mathbb{R}^n)} \leqslant \lambda^{\frac{n}{2}-\frac{2}{p-1}}(\lambda^{-1}+1)\|u_0\|_{H^1(\mathbb{R}^n)} \leqslant \lambda^{\frac{n}{2}-\frac{2}{p-1}}(\lambda^{-1}+1)E.$$

取$\lambda = (\frac{1}{2} - \frac{\delta}{2E})^{(\frac{n}{2}-\frac{2}{p-1})^{-1}}$, 则

$\|u_0^\lambda\|_{H^1(\mathbb{R}^n)} \leqslant E-\delta$, 且$\|u_0^\lambda\|_{H^1(\mathbb{R}^n)} \leqslant [1/2+4^{(\frac{2}{p-1}+1-\frac{n}{2})/(\frac{n}{2}-\frac{2}{p-1})}]\|u_0\|_{H^1(\mathbb{R}^n)}$.

由归纳假设知

$$\|u^\lambda\|_{L^q_{t,x}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n)} \lesssim_{\|u_0^\lambda\|_{H^1}} 1 \lesssim_{\|u_0\|_{H^1}} 1.$$

$$\begin{aligned}\|u^\lambda\|^q_{L^q_{t,x}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n)} =&\lambda^{-\frac{2q}{(p-1)}}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}^n}|u(t/\lambda^2,x/\lambda)|^q dxdt\\ =&\lambda^{n+2-\frac{2q}{(p-1)}}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}^n}|u(t,x)|^q dxdt\\ =&\|u\|^q_{L^q_{t,x}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n)}.\end{aligned}$$

从而有$\|u\|_{L^q_{t,x}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n)} \lesssim_{\|u_0\|_{H^1}} 1$. 因此, 有下面的定理

定理 7.2.10 (整体时空估计). 设$n \geqslant 3$和$p \in (1+\frac{4}{n}, 1+\frac{4}{n-2})$. 对任意的$u_0 \in H^1(\mathbb{R}^n)$, 记$u$为具初值$u(0) = u_0$的方程(7.2.1)的初值问题的整体解, 则$u$满足整体时空估计

$$\|u\|_{L^q_{t,x}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n)} \lesssim_{\|u_0\|_{H^1}} 1, \tag{7.2.14}$$

其中$q = \frac{n+2}{2}(p-1)$.

§7.3 与NLS相关的一些结果

本节, 我们将叙述最近的一部分相关结果, 在此并不给出证明, 而只是列出一部分相关参考文献以方便读者查阅.[5]

下面先对H^1-临界NLS方程的散射结果作一简单的介绍. 先引入方程

$$\begin{cases} iu_t + \Delta u = |u|^{\frac{4}{n-2}}u, \\ u(0,x) = u_0(x). \end{cases} \tag{7.3.1}$$

[5] 关于其它相关非线性Schrödinger 方程的散射理论的研究概况及最新进展可参见Dispersive Wiki网页http://tosio.math.utoronto.ca/wiki/index.php/NLS_scattering.

最初, 由J. Bourgain[12]和M. Grillakis[47]分别得到了$n=3,4$维径向情形时解的整体适定性. 后由T. Tao[152]将此结果推广到了任意维($n\geqslant 3$)球对称解的情形. 同时, J. Colliander, M. Keel, G. Staffilani, H. Takaoka, 和T. Tao等[31]基于J. Bourgain的关于能量运用归纳法的思想得到了$n=3$维一般初始值情形下解的整体适定性及其散射理论. 其中, 对频率空间和物理空间同时运用归纳法, 并且用Morawetz相互作用估计(7.1.53)来代替原来的Morawetz不等式(7.1.43), 以更好地处理非径向的情形. 此外, 此Morawetz相互作用估计与频率空间中控制L^2质量的动量的近似守恒律一起刻画了能量集中的可能性. 后又被E. Ryckman和M. Visan[135]以及M. Visan[165]分别将此结果推广到了$n=4$维及任意$n\geqslant 5$维的情形. 到此, 任意维($n\geqslant 3$)$\dot{H}^1$-临界NLS方程的散射理论已被完全解决, 即下面的定理.

定理 7.3.1 ([31, 135, 165, **定理**1.1]). 令$n\geqslant 3$. 则对任意具有有限能量$E(u_0)<\infty$的初始值u_0, (7.3.1)存在唯一整体解$u\in C_t^0(\dot{H}_x^1)\cap L_{t,x}^{\frac{2(n+2)}{n-2}}$时使得

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{\mathbb{R}^n}|u(t,x)|^{\frac{2(n+2)}{n-2}}dxdt\leqslant C(E(u_0)),$$

其中

$$E(u(t))=\int_{\mathbb{R}^n}\frac{1}{2}|\nabla u(t,x)|^2+\frac{n-2}{2n}|u(t,x)|^{\frac{2n}{n-2}}dx$$

为能量守恒式.

同时, 上面的结论也蕴含着下面的散射结果和渐近完备性:

推论7.3.2 ([31, 165, **推论**1.2]**以及**[135, **命题**8.1]). 令$n\geqslant 3$. 令u_0具有有限能量, u是(7.3.1)在$u\in C_t^0(\dot{H}_x^1)\cap L_{t,x}^{\frac{2(n+2)}{n-2}}$中的唯一整体解. 则存在自由Schrödinger方程$(i\partial_t+\Delta)u_\pm=0$的有限能量解$u_\pm$使得

$$\|u_\pm(t)-u(t)\|_{\dot{H}_x^1}\to 0,\ \text{当}\, t\to\pm\infty,$$

并且, 映射$u_0\mapsto u_\pm(0)$是从$\dot{H}^1(\mathbb{R}^n)$到其自身的同胚映射.

随着能量临界的非聚焦NLS方程散射理论的完美解决, 人们把目光投向了另一个具有挑战性的问题, 那就是质量临界非聚焦NLS方程

$$\begin{cases} iu_t+\Delta u=|u|^{\frac{4}{n}}u, \\ u(0,x)=u_0(x) \end{cases}\tag{7.3.2}$$

的整体适定性和散射算子的存在性. 目前, 在这方面已有部分结果:

- $n \geqslant 1$, 对于充分小的初值$u_0 \in L^2(\mathbb{R}^n)$, (7.3.2)是整体适定的并且散射算子存在.

- $n \geqslant 2$, 对于径向初值$u_0 \in L^2(\mathbb{R}^n)$, (7.3.2)是整体适定的并且散射算子存在, 详见[89, 91].

- $n \geqslant 3$, 对任意初值$u_0 \in L^2(\mathbb{R}^n)$, (7.3.2)是整体适定的并且散射算子存在, 详见[39].

对于含其它非线性项的NLS方程近年来也得到了一些非常好的结果. 如含混合幂函数型非线性项$|u|^{p_1}u + |u|^{p_2}u$的NLS方程当$4/n < p_1 \leqslant p_2 < 4/(n-2)$以及$4/n \leqslant p_1 < p_2 \leqslant 2^* - 2$时散射算子在整个能量空间$H^1$中存在, 详见[118, 122, 155]. 含非线性项$(V * |u|^2)u$的NLS, 亦即Hartree方程, 当$V \in L^{p_1} + L^{p_2}$, $p_1, p_2 \geqslant 1$及$n/4 < p_2 \leqslant p_1 < n/2$时散射算子在$H^1$中存在, 详见[121]. 又如含如下非线性项

$$f(u) = \mu \sum_{k \geqslant 1+2/n} \frac{\lambda^{2k}}{(2k)!} |u|^{2k} u, \quad \mu, \lambda > 0, \quad n = 1, 2 \tag{7.3.3}$$

的NLS在一定条件下, 其散射算子也是存在的, 详见[176].

与此同时, 聚焦型的NLS

$$\begin{cases} iu_t + \Delta u = -|u|^p u, \\ u(0, x) = u_0(x) \end{cases} \tag{7.3.4}$$

也得到了长足的进展. 比如在$n = 3, 4, 5$维空间具$\dot{H}^1$-临界非线性项的情形, 即$p = 4/(n-2)$, 对任意能量和动能均小于基态的对应能量和动能的径向初值$u_0 \in \dot{H}^1(\mathbb{R}^n)$, (7.3.4)是整体适定的并且散射算子存在, 详见[75]; 对于维数$n \geqslant 5$的情形, 可以去掉“径向”的限制, 即对任意能量和动能均小于基态的对应能量和动能的初值$u_0 \in \dot{H}^1(\mathbb{R}^n)$, (7.3.4)是整体适定的并且散射算子存在, 详见[90]. 除此之外, 当维数$n \geqslant 4$时, 对于质量临界的聚焦型NLS, 即$p = 4/n$, 当球对称初值$u_0 \in H^1(\mathbb{R}^n)$的质量等于对应基态的质量时, (7.3.4)的解不会发生散射,而是以孤立波的形式存在, 详见[88].

第八章　没有角截断假设下Boltzmann方程的弱解的正则性问题

Boltzmann方程主要描述稀薄气体分子间的相互碰撞的物理现象, 提供在微观水平上产生的宏观信息, 是流体力学基本方程组的统计力学基础, 是空气动力学中重要的模型之一. 它广泛应用在航空航天, 核能技术,半导体,等离子体,凝聚态研究等方面. 而且Boltzmann方程通过矩展开对应流体力学中的Euler 方程(0阶) Navier-Stokes 方程(1阶). 本章主要研究Boltzmann方程的相关问题之一, 即没有角截断假设下Boltzmann方程弱解的正则性问题(关于带有角截断假设下Boltzmann方程的相关问题, 由于篇幅有限, 在此就不做介绍了. 此外关于角截断假设的定义,我们在本章第一节给出). 由于此问题目前主要利用调和分析理论来研究, 所以在本章中我们通过阐述此问题, 让读者初步了解Boltzmann方程. 首先, 需要注意的是, 在没有角截断假设下Boltzmann方程的碰撞算子像一个主部为$(-\Delta)^{\nu/2}$的奇异积分算子或拟微分算子. 此现象由Pao[129]最早发现的, 也可以参看Ukai的结果[161], Lions[107]给出了其精确的表达式, Villani[163]给出了Sobolev最佳指数$\nu/2$. 上世纪90年代,Desvillettes[33, 34]针对齐次空间的一些简单模型, 得到了弱解的正则性结果. 本世纪初, Alexandre, Desvillettes, Villani 和Wennberg [2]建立了关于碰撞算子的一些漂亮的公式. 本章给出的结果大部分给出了完整的证明. 为方便起见, 在每小节都分别列出了相应的文献以便有兴趣的读者参考.

§8.1　Boltzmann方程模型的导出

本节我们从数学的角度简单介绍一下Boltzmann方程模型的导出, 具体可参看[23, 35, 164].

§8.1.1　输运模型

空气动力学理论来源于在相空间中用分布函数描述气体(等离子体,其它的由大量粒子组成的系统)的模型. 此相空间即包含宏观变量(物理空间中的位置)也包含微观变量(描述粒子的状态). 当前, 我们主要研究由单一粒子组成的系统, 粒子遵循古典力学的守恒律,没有相对论及量子效应. 一般地, 我们主要研究在一个有界或者无界的区域$\Omega \subset \mathbb{R}^n$(通常空间维数$n = 3$)中气体在时间区间$[0, T]$ 或者$[0, +\infty]$内的变化情况. 通常, 假设未知函数$f(t, x, v) \geqslant 0$, 定义

在$[0,T]\times\Omega\times\mathbb{R}^n$, 其表示为在相空间中在时间$t$时刻, x位置下,以速度v运行的粒子的密度函数. 事实上, $x=(x_1,x_2,...x_n)$ 和$v=(v_1,v_2,...v_n)$是向量变量.

在没有外力的作用下, 如果粒子之间不发生碰撞, 而且粒子与其周围的环境也不发生碰撞, 那么粒子将沿着直线作匀速运动. 也就是说,给定任意时刻t,位置x和速度v, 经过时间s后, 粒子在$t+s$时刻, 在$x+vs$位置,粒子还保持速度为v运动. 即粒子运动的轨迹是直线.

$$f(t+s,x+vs,v)=f(t,x,v),\quad \text{对任意的}s. \tag{8.1.1}$$

对(8.1.1)两边对s求微分

$$\partial_t f+v\cdot\nabla_x f=0. \tag{8.1.2}$$

(8.1.2)为自由输运模型. $v\cdot\nabla_x$ 为输运算子, 其中 "$\cdot$" 表示$\mathbb{R}^n$空间上的内积$v\cdot\nabla_x=\sum_{k=1}^n v_k\frac{\partial}{\partial x_k}$. (8.1.2) 说明当粒子间没有相互碰撞时,粒子的密度函数的变化率为零.

如果给定一个外力$F(t,x)=(F_1,F_2,...F_n)$(像这样的外力也可能在某些特别环境下依赖于速度v, 例如在磁场的环境中)作用于粒子上. 粒子运动的轨迹不再是直线, 而满足如下的微分方程:

$$\dot{x}(t)=v(t) \tag{8.1.3}$$

$$\dot{v}(t)=F(t,x(t)) \tag{8.1.4}$$

那么$f(t,x,v)$满足如下的偏微分方程, 称之为Vlasov方程

$$\partial_t f+v\cdot\nabla_x f+F(t,x)\cdot\nabla_v f=0, \tag{8.1.5}$$

其中$F(t,x)\cdot\nabla_v=\sum_{k=1}^n F_k\frac{\partial}{\partial v_k}$.

§8.1.2 Boltzmann方程模型

如果当粒子上的作用力主要是由粒子之间相互碰撞产生的(通常地,假设粒子之间的作用力是由相互作用位势$\phi(r)$决定的, r是粒子之间的距离), 那么将导出著名的Boltzmann方程. 在给出Boltzmann方程前,我们首先需要对粒子之间相互碰撞给出一些假设:

(1). 粒子之间只有二元碰撞, 这个假设蕴涵着气体是足够稀薄的使得二元以上的碰撞可以忽略不计; 特别地, 如果在三维空间下, 由N个半径为r的硬球组成的气体, 这个假设意味着:

$$Nr^3\ll 1,\quad Nr^2\simeq 1. \tag{8.1.6}$$

(2). 假设碰撞发生过程中的空间, 速度和时间对于所研究的整个空间, 速度和时间的范围, 是局部的; 也就是说碰撞发生的时间和所要研究的时间$[0,T]$相比非常短, 碰撞后粒子的速度的变化率非常小.

(3). 假设碰撞是弹性碰撞, 动能和势能在碰撞过程中是守恒的.

(4). 假设碰撞是微观可逆的, 也就是说微观动力系统是时间可逆的. 而且如果用(v,v_*) 表示碰撞前的速度, 用(v',v'_*)表示碰撞后的速度, 那么由(v,v_*)变成(v',v'_*)的概率和由(v',v'_*)变成(v,v_*)的概率一样.

(5). 假设将要碰撞的两个粒子的速度是没有关系的, 粗略地说, 碰撞并不是经常发生的, 一个粒子和另一个粒子(虽然此粒子可能和别的粒子发生碰撞)已经和自己发生碰撞, 而再次碰撞的几率可以忽略不计.

这样, 如果只考虑到粒子之间的相互碰撞,则方程(8.1.2)变为更一般的格式

$$\partial_t f + v\cdot\nabla_x f = Q(f)(v). \tag{8.1.7}$$

(8.1.7) 说明当粒子间有相互碰撞时, 粒子的密度函数的变化率不再是零, 而是和其本身有关的函数. 下面我们将导出$Q(f)$的具体形式. 首先我们定义$f_2(v_1,v_2)$为速度分别为v_1,v_2的两个粒子的共同的密度函数, 定义$p(v_1,v_2\to v_3,v_4)$表示在t时刻x位置, 速度分别为v_1,v_2的两个粒子碰撞后分别变为v_3,v_4的概率密度函数. 由于只是二元碰撞, 那么我们将考虑如下将影响速度为v(首先给定)的粒子密度的两种的情形:

首先可能的情形是, 一个以速度为v的粒子和另一个速度为v_*的粒子碰撞后, 一个速度变为v', 另一个速度变为v'_*.

另外一种可能的情形是, 一个以速度为w的粒子和另一个速度为w_*的粒子碰撞后, 一个速度变为v, 另一个速度变为w'_*.

那么$Q(f)=Q^+(f)-Q^-(f)$, 其中$Q^-(f)$ 和$Q^+(f)$分别描述上面两种情形. 其中$Q^-(f)$表示速度v的粒子碰撞后变为其他速度的密度变化率, $Q^+(f)$表示其他速度的粒子碰撞后变为速度v的密度变化率.

$$Q^-(f)(v) = \int_{v_*}\int_{v'}\int_{v'_*} f_2(v,v_*)p(v,v_*\to v',v'_*)dv'_*dv'dv_* \tag{8.1.8}$$

$$Q^+(f)(v) = \int_{w}\int_{w_*}\int_{w'_*} f_2(w,w_*)p(w,w_*\to v,w'_*)dw'_*dw_*dw \tag{8.1.9}$$

而由上面的假设(4), 有

$$\forall v_1,v_2,v_3,v_4,\ p(v_1,v_2\to v_3,v_4) = p(v_3,v_4\to v_1,v_2)$$

再由上面的假设(5), 可知v 和v_*是相互独立的变量, w和w_*是相互独立的变量, 那么有$f_2(v,v_*) = f(v)f(v_*)$ 和$f_2(w,w_*) = f(w)f(w_*)$. 这样, 令$Q(f) = Q(f,f) = Q^+(f,f) - Q^-(f,f)$. 其中

$$Q^-(f,f)(v) = \int_{v_*}\int_{v'}\int_{v'_*} f(v)f(v_*)p(v,v_* \to v',v'_*)dv'_*dv'dv_* \tag{8.1.10}$$

$$Q^+(f,f)(v) = \int_{v_*}\int_{v'}\int_{v'_*} f(v')f(v'_*)p(v',v'_* \to v,v_*)dv'_*dv'dv_* \tag{8.1.11}$$

我们可得到

$$Q(f,f)(v) = \int_{v_*}\int_{v'}\int_{v'_*} \Big(f(v')f(v'_*) - f(v)f(v_*)\Big)p(v,v_* \to v',v'_*)dv'_*dv'dv_* \tag{8.1.12}$$

下面, 我们只要给出$p(v,v_* \to v',v'_*)$的表达式即可. 首先由碰撞中的动量和动能守恒, 我们有

$$\begin{cases} v + v_* = v' + v'_*, \\ \frac{|v|^2}{2} + \frac{|v_*|^2}{2} = \frac{|v'|^2}{2} + \frac{|v'_*|^2}{2}. \end{cases} \tag{8.1.13}$$

这实际上是由$2n$个数值未知量构成的$n+1$个数值方程, 很自然可以期望此系统的解可以由$n-1$个参数来确定. 因此这些解有一个方便的表达式, 称之为$\sigma-$表达式:

$$v' = \frac{v+v_*}{2} + \frac{|v-v_*|}{2}\sigma, \quad v'_* = \frac{v+v_*}{2} - \frac{|v-v_*|}{2}\sigma, \tag{8.1.14}$$

σ 在球面S^{n-1}上变化. 可参看下图

由Galilean不变性, 可得概率$p(v,v_* \to v',v'_*)$ 依赖于碰撞前相对速度的大小$|v-v_*|$ 和相对速度的夹角$\frac{v-v_*}{|v-v_*|}\cdot\sigma$, 我们用函数$B(\cdot,\cdot)$来表示. 这样, 我们可以写出Boltzmann方程的碰撞算子的最后的形式为:

$$Q(f,f) = \int_{\mathbb{R}^n}\int_{S^{n-1}} B(|v-v_*|, \frac{v-v_*}{|v-v_*|}\cdot\sigma)\{f(v'_*)f(v') - f(v_*)f(v)\}d\sigma dv_*, \tag{8.1.15}$$

这里函数B 称为cross section. 方便起见, 我们有时候也使用如下双线形表达式$Q(g,f)$:

$$Q(g,f) = \int_{\mathbb{R}^n}\int_{S^{n-1}} B(|v-v_*|,\sigma)\{g(v'_*)f(v') - g(v_*)f(v)\}d\sigma dv_*, \tag{8.1.16}$$

为书写简单起见, 我们有时候令$g(v'_*)f(v')=g'_*f'$ 和$g(v_*)f(v)=g_*f$. 最后我们给出Boltzmann方程的标准形式为

$$\partial_t f+v\cdot\nabla_x f=Q(f,f)(v). \tag{8.1.17}$$

其中$Q(f,f)$由(8.1.15)给出. 其中关于齐次空间的Boltzmann方程, 也就是粒子在空间是均匀分布的, 意味着未知函数f只是关于时间t 和速度v的函数, 和空间位置x无关, 即$f=f(t,v)$. (8.1.17)变为

$$\partial_t f=Q(f,f)(v). \tag{8.1.18}$$

此模型相对简单, 本章将主要研究(8.1.18).

§8.1.3 Cross section

一般情形下, 函数B的具体形式写不出来. 然而为了抓住其主要性质, 通常可以假设B有如下形式:

$$B(|v-v_*|,\sigma)=\Phi(|v-v_*|)b(\cos\theta),\ \ \cos\theta=\langle\frac{v-v_*}{|v-v_*|},\sigma\rangle,\ 0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}. \tag{8.1.19}$$

注意到由球面积分公式, 可得

$$\int_{S^{n-1}}B(|v-v_*|,\sigma)d\sigma=|S^{n-2}|\int_0^{\frac{\pi}{2}}B(|v-v_*|,\cos\theta)d\theta$$

其中$|S^{n-2}|$表示单位球的表面积.

如果粒子之间的作用位势$\phi(r)$是inverse-power law potentials时, 即粒子之间的作用力和r^{-s} (其中r是粒子之间的距离, $s>2$)成正比时, 在空间维数为3时, 函数B可以写为如下:

$$B(|v-v_*|,\sigma)=|v-v_*|^{\frac{s-5}{s-1}}b(\cos\theta) \tag{8.1.20}$$

其中$b>0$是除端点1以外的光滑函数, 而且在端点附近满足:

$$\sin^{n-2}\theta b(\cos\theta)\approx\frac{K}{\theta^{\frac{s+1}{s-1}}}\quad 当\quad \theta\to 0,\ K>0. \tag{8.1.21}$$

当$\frac{s+1}{s-1}>1$时, b 在$\theta=0$点有奇异性, 使得b 不可积. 由于这个奇异性引起的困难, Grad在接近$\theta=0$点时引进一个角度截断, 这意味着我们用如下新的cross section来代替(8.1.20)和(8.1.21)中的函数B

$$\tilde{B}(|v-v_*|,\sigma)=|v-v_*|^{\frac{s-5}{s-1}}\tilde{b}(\cos\theta) \tag{8.1.22}$$

其中$\tilde{b}$是光滑的, 而且$\sin^{n-2}\theta\tilde{b}(\cos\theta)$在接近$\theta=0$可积. 这样,以后如果当$B$是局部可积的我们称其为cutoff cross section , 或者称为具有角截断假设; 注意到此假设是为了研究方便人为加的, 是不自然的. 如果B像(8.1.21)有奇异性, 称其为non cutoff cross section,或者称为没有角截断假设. 本章主要研究后一种情形. 注意分解$Q(f,f)=Q^+(f,f)-Q^-(f,f)$, 只有当B是可积时(cutoff cross section)才有意义, 其中

$$Q^+(f,f)=\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{S}^{n-1}}B(|v-v_*|,\frac{v-v_*}{|v-v_*|}\cdot\sigma)f(v'_*)f(v')d\sigma dv_*, \tag{8.1.23}$$

$$Q^-(f,f)=\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{S}^{n-1}}B(|v-v_*|,\frac{v-v_*}{|v-v_*|}\cdot\sigma)f(v_*)f(v)d\sigma dv_*, \tag{8.1.24}$$

当B是不可积时(non cutoff cross section), 有时候方便起见,我们有时候也把$Q(f,f)$分解成$Q^+(f,f)$和$Q^-(f,f)$两部分, 这实际上没有意义的, 但作为计算的中间步骤是合法的.

我们重点研究位势是inverse-power law potentials的模型, 此时函数B可以写为如下:

$$B(|v-v_*|,\sigma)=|v-v_*|^\gamma b(\cos\theta) \tag{8.1.25}$$

如果$\gamma>0$, 称之为hard potentials; 通常地, 研究$0<\gamma\leqslant 2$

如果$\gamma=0$, 称之为Maxwellian potentials;

如果$-n<\gamma<0$, 称之为soft potentials, $-2<\gamma<0$ 称为moderately soft potentials, $\gamma\leqslant -2$ 称为very soft potentials.

最后注意当$s=2$, 其作用位势$\phi(r)$变为Coulomb 位势, 这样会导致另外一个方程Fokker-Planck-Landau 方程, 由于篇幅限制, 我们就不在本书中做详细介绍了.

§8.2 Boltzmann方程的一些基本性质

本节我们度简单介绍一下Boltzmann方程常用的一些基本性质和其Fourier变换形式, 具体可参看[35, 164].

1.碰撞算子的对称性, 由公式(8.1.14) 可得$f'_*f'-f_*f$在变量变换$\sigma\to-\sigma$下是不变的. 这样, 我们用B的对称形式来代替B

$$\bar{B}(z,\sigma)=\{B(z,\sigma)+B(z,-\sigma)\}I_{z\cdot\sigma>0}$$

这就是我们为什么在(8.1.19)中假设相对角度变化的范围是从0 到$\frac{\pi}{2}$, 事实上, 在(8.1.19)中B 就是上式中的$\bar{B}$.

2. 变量变换$(v, v_*, \sigma) \to (v', v'_*, k)$ (其中$k = \frac{v-v_*}{|v-v_*|}$) 的Jacobian行列式为1, 既然$\sigma = \frac{v'-v'_*}{|v'-v'_*|}$, 我们有时方便起见把此变量变化写为$(v, v_*) \to (v', v'_*)$, 此变量变换称为pre-post collision 变量变换. 即令$f = f(v, v_*, v', v'_*, \sigma)$, 那么有

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n}\int_{S^{n-1}} f(v, v_*, v', v'_*, \sigma) d\sigma dv_* dv \\ &= \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n}\int_{S^{n-1}} f(v', v'_*, v, v_*, \sigma) d\sigma dv_* dv\end{aligned} \tag{8.2.1}$$

(8.2.1)意味着碰撞是微观可逆的.

3. 变量变换$(v, v_*, \sigma) \to (v_*, v, \sigma)$ 的Jacobian行列式为1. 即令$f = f(v, v_*, v', v'_*, \sigma)$, 有

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n}\int_{S^{n-1}} f(v, v_*, v', v'_*, \sigma) d\sigma dv_* dv \\ &= \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n}\int_{S^{n-1}} f(v_*, v, v'_*, v', \sigma) d\sigma dv_* dv\end{aligned} \tag{8.2.2}$$

(8.2.2)意味着v 和v^*地位是一样的.

这样如果$\varphi(v)$是连续函数, 那么利用上面的两个变量变换, 我们有

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{R}^n} Q(g, f)\varphi(v) dv \\ &= \int_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n}\int_{\S^{n-1}} B(|v-v_*|, \sigma)\{g(v'_*)f(v') - g(v_*)f(v)\}\varphi(v) d\sigma dv_* dv \\ &= \int_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n}\int_{S^{n-1}} B(|v-v_*|, \sigma) g(v_*)f(v)(\varphi(v') - \varphi(v)) d\sigma dv_* dv \\ &= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n}\int_{S^{n-1}} B g(v_*)f(v)(\varphi(v'_*) + \varphi(v') - \varphi(v_*) - \varphi(v)) d\sigma dv_* dv.\end{aligned} \tag{8.2.3}$$

如果令$\varphi(v) = 1, v_j, j = 1, 2, ...n, \frac{|v|^2}{2}$, 利用上面的式子, 我们可以得到质量, 动量和动能守恒

$$\int_{\mathbb{R}^n} Q(f, f)(v) dv = 0, \int_{\mathbb{R}^n} Q(f, f)(v) v_j dv = 0, \int_{\mathbb{R}^n} Q(f, f)(v)\frac{|v|^2}{2} dv = 0. \tag{8.2.4}$$

如果令$\varphi(v) = logf(v)$, 首先定义熵耗散

$$D(f) = -\int_{\mathbb{R}^n} Q(f,f)(v) logf(v) dv$$

利用$(F-G)(logF - logG) \geqslant 0$, 我们有

$$\begin{aligned} D(f) = \frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n}\int_{S^{n-1}} B(|v-v_*|,\sigma)\Big(f(v_*')f(v') - f(v_*)f(v)\Big) \\ log\frac{(f(v_*')f(v')}{f(v_*)f(v)} d\sigma dv_* dv \geqslant 0 \end{aligned} \tag{8.2.5}$$

这实际上是Boltzmann方程H定理的前半部分. 通常, 我们假设$B(|v-v_*|,\sigma) > 0$, 这样(8.2.5)式中等号成立的充要条件是

$$f(v_*')f(v') = f(v_*)f(v). \tag{8.2.6}$$

这样在对B和f相当弱的假设下, 有如下成立:

$$D(f) = 0 \Longleftrightarrow Q(f,f) = 0 \Longleftrightarrow f = M(t,x,v) \tag{8.2.7}$$

$$M(t,x,v) = M_{\rho,u,T}(t,x,v) = \frac{\rho}{(2\pi T)^{n/2}} e^{-\frac{|v-u|^2}{2T}} \tag{8.2.8}$$

其中ρ 和u分别是宏观密度和速度, T为温度. M称为Maxwellian, 是描述气体在平衡态下速度的分布. 这里(ρ,u,T)是参数, 如果它们都是常数, 则称M称为整体(绝对)Maxwellian , 如果它们是(x,t)的函数,则称M称为局部Maxwellian. 显然整体(绝对)Maxwellian是没有外力F作用的Boltzmann方程的稳态解.

下面, 我们给出碰撞算子$Q(g,f)$的Fourier变换形式, 此形式首先是由Bobylev给出的, 所以也称为Bobylev等式. 我们首先给出$Q^+(g,f)$的Fourier 变换形式. 对任意的试验函数$\varphi(v)$, 利用(8.2.1)pre-post collision 变量变换, 可得

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}^n} Q^+(g,f)\varphi(v)dv \\ &= \int_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{S}^{n-1}} B(|v-v_*|, \frac{v-v_*}{|v-v_*|}\cdot\sigma) g(v_*)f(v)\varphi(v') d\sigma dv_* dv \end{aligned} \tag{8.2.9}$$

如果在(8.2.9)中, 令$\varphi(v) = e^{-iv\xi}$, 有

$$\begin{aligned} &\mathcal{F}(Q^+(g,f))(\xi) \\ &= \int_{\mathbb{R}^{2n}}\int_{S^{n-1}} B(|v-v_*|, \frac{v-v_*}{|v-v_*|}\cdot\sigma) g(v_*)f(v) e^{-i\frac{v+v_*}{2}\cdot\xi} e^{-i\frac{|v-v_*|}{2}\sigma\cdot\xi} d\sigma dv_* dv \end{aligned} \tag{8.2.10}$$

此外,我们有如下等式:

$$\int_{S^{n-1}} F(k\cdot\sigma, l\cdot\sigma)d\sigma = \int_{S^{n-1}} F(l\cdot\sigma, k\cdot\sigma)d\sigma,\ \ |l| = |k| = 1. \tag{8.2.11}$$

利用此等式, 可得

$$\begin{aligned}&\int_{S^{n-1}} B(|v-v_*|, \frac{v-v_*}{|v-v_*|}\cdot\sigma)e^{-i\frac{|v-v_*|}{2}\sigma\cdot\xi}d\sigma \\ &= \int_{S^{n-1}} B(|v-v_*|, \frac{\xi}{|\xi|}\cdot\sigma)e^{-i\frac{|\xi|}{2}\sigma\cdot(v-v_*)}d\sigma\end{aligned} \tag{8.2.12}$$

这样, 利用(8.2.12)和Fourier逆变换, 我们有

$$\begin{aligned}&\mathcal{F}(Q^+(g,f))(\xi) \\ &= \int_{\mathbb{R}^{2n}}\int_{S^{n-1}} B(|v-v_*|, \frac{\xi}{|\xi|}\cdot\sigma)g(v_*)f(v)e^{-i\frac{v+v_*}{2}\cdot\xi}e^{-i\frac{|\xi|}{2}\sigma\cdot(v-v_*)}d\sigma dv_* dv \\ &= \int_{\mathbb{R}^{2n}}\int_{S^{n-1}} B(|v-v_*|, \frac{\xi}{|\xi|}\cdot\sigma)g(v_*)f(v)e^{-iv\xi^+}e^{-iv_*\xi^-}d\sigma dv_* dv \\ &= \int\Big(\int_{\mathbb{R}^{2n}} B(|v-v_*|, \frac{\xi}{|\xi|}\cdot\sigma)\hat{g}(\eta_*)\hat{f}(\eta)e^{iv\eta}e^{iv_*\eta_*}e^{-iv\xi^+}e^{-iv_*\xi^-}d\eta_* d\eta\Big)d\sigma dv_* dv \\ &= \int_{\mathbb{R}^{2n}\times S^{n-1}} \hat{g}(\eta_*)\hat{f}(\eta)\Big(\int B(|v-v_*|, \frac{\xi}{|\xi|}\cdot\sigma)e^{iv(\eta-\xi^+)}e^{iv_*(\eta_*-\xi^-)}dv_* dv\Big)d\sigma d\eta_* d\eta,\end{aligned} \tag{8.2.13}$$

其中, 这里

$$\xi^+ = \frac{\xi+|\xi|\sigma}{2},\quad \xi^- = \frac{\xi-|\xi|\sigma}{2} \tag{8.2.14}$$

首先定义δ 为Dirac函数, $\hat{B}(|\xi|,\cos\theta) = \int_{\mathbb{R}^n} B(|q|,\cos\theta)e^{-iq\cdot\xi}$为函数$B$关于相对速度Fourier变换. 做变量变换$q = v - v_*$,

$$\begin{aligned}&\Big(\int_{\mathbb{R}^{2n}} B(|v-v_*|, \frac{\xi}{|\xi|}\cdot\sigma)e^{iv(\eta-\xi^+)}e^{iv_*(\eta_*-\xi^-)}dv_* dv \\ &= \Big(\int_{\mathbb{R}^{2n}} B(|q|, \frac{\xi}{|\xi|}\cdot\sigma)e^{iv(\eta_*+\eta-\xi)}e^{-iq(\eta_*-\xi^-)}dq dv \\ &= \hat{B}(|\eta_*-\xi^-|, \frac{\xi}{|\xi|}\cdot\sigma)\delta(\eta = \xi - \eta_*)\end{aligned} \tag{8.2.15}$$

这样由(8.2.15), 可得

$$\mathcal{F}(Q^+(g,f))(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n\times S^{n-1}} \hat{g}(\eta_*)\hat{f}(\xi-\eta_*)\hat{B}(|\eta_*-\xi^-|, \frac{\xi}{|\xi|}\cdot\sigma))d\sigma d\eta_* \tag{8.2.16}$$

令$\xi_* = \eta_* - \xi^-$, 我们有

$$\mathcal{F}(Q^+(g,f))(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n \times S^{n-1}} \hat{g}(\xi^- + \xi_*)\hat{f}(\xi^+ - \xi_*)\hat{B}(|\xi_*|, \frac{\xi}{|\xi|} \cdot \sigma))d\sigma d\xi_* \tag{8.2.17}$$

对于Maxwellian potentials (Maxwellian molecules)情形, 即$B(|z|, \cos\theta) = b(\cos\theta)$,

$$\hat{B}(|\xi_*|, \cos\theta) = \delta(\xi_* = 0)b(\cos\theta). \tag{8.2.18}$$

这样,

$$\mathcal{F}(Q^+(g,f))(\xi) = \int_{S^{n-1}} \hat{g}(\xi^-)\hat{f}(\xi^+)b(\frac{\xi}{|\xi|} \cdot \sigma)d\sigma \tag{8.2.19}$$

关于$Q^-(g,f)$ 的Fourier变换, 当$B(|z|, \cos\theta) = b(\cos\theta)$时, 很容易地可得

$$\mathcal{F}(Q^-(g,f))(\xi) = \int_{S^{n-1}} \hat{g}(0)\hat{f}(\xi)b(\frac{\xi}{|\xi|} \cdot \sigma)d\sigma \tag{8.2.20}$$

§8.3 没有角截断假设下碰撞算子的性质

本节主要研究cross section B 形如(8.1.8) 和(8.1.9)时, $Q(g,f)$的性质. 主要证明在分布意义下, 碰撞算子可分解成一个正则部分($(-\Delta)^{\nu/2}$算子作用的)和一个可控制的部分, 具体细节有兴趣的读者可参看[2]. 首先给出如下标准的范数定义

$$\|f\|_{L^p_r} = \|f(v)\langle v\rangle^r\|_{L^p}, \qquad 1 \leqslant p \leqslant \infty, \quad r \in \mathbb{R},$$

$$\|f\|_{L\log L} = \int_{\mathbb{R}^n} f\log(1+f)dv$$

首先, 假设$f \in H^2(\mathbb{R}^n)$, 有

$$\begin{aligned}
&\Big(Q(g,f), f\Big)_{L^2} \\
&= \int_{\mathbb{R}^{2n} \times S^{n-1}} B(|v-v_*|, \frac{v-v_*}{|v-v_*|} \cdot \sigma)g(v_*)f(v)(f(v') - f(v))d\sigma dv_* dv \\
&= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^{2n} \times S^{n-1}} B(|v-v_*|, \frac{v-v_*}{|v-v_*|} \cdot \sigma)g(v_*)(f^2(v') - f^2(v))d\sigma dv_* dv \\
&- \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^{2n} \times S^{n-1}} B(|v-v_*|, \frac{v-v_*}{|v-v_*|} \cdot \sigma)g(v_*)(f(v') - f(v))^2 d\sigma dv_* dv
\end{aligned} \tag{8.3.1}$$

对(8.3.1)式中的第一项, 我们有如下引理.

引理8.3.1. (Cancellation Lemma) 假设$v_* \in \mathbb{R}^n$, 则有

$$\int_{\mathbb{R}^n\times S^{n-1}} B(|v-v_*|, k\cdot\sigma)(f^2(v')-f^2(v))d\sigma dv = (f^2 * A)(v_*) \tag{8.3.2}$$

其中

$$k = \frac{v-v_*}{|v-v_*|} \tag{8.3.3}$$

$$A(z) = S^{n-2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2}\theta\Big(\frac{1}{\cos^n\frac{\theta}{2}}B(\frac{|z|}{\cos\frac{\theta}{2}},\cos\theta) - B(|z|,\cos\theta)\Big)d\theta \tag{8.3.4}$$

证明. 为了运算方便起见, 我们不妨假设B在球面上是可积的. 否则, 我们可取一列在球面上是可积的函数$\tilde{B}_j$, 使得$\lim_{j\to\infty}\tilde{B}_j = B$. 首先, 我们有

$$v' = \frac{v+v_*}{2} + \frac{|v-v_*|}{2}\sigma = v_* + \frac{|v-v_*|}{2}(k+|k|\sigma)$$

给定σ和v_*, 做变量变换$v\to v'$, 注意到此变量变换定义在$\cos\theta>0$的集合上. 定义$k' = \frac{v'-v_*}{|v'-v_*|}$, 那么此变量变换的Jacobian为:

$$\Big|\frac{dv'}{dv}\Big| = \Big|\frac{1}{2}I + \frac{1}{2}k\otimes\sigma\Big| = \frac{1}{2^n}(1+k\cdot\sigma) = \frac{(k'\cdot\sigma)}{2^{n-1}} \tag{8.3.5}$$

其中

$$k'\cdot\sigma = \cos\frac{\theta}{2} \geqslant \frac{1}{\sqrt{2}}$$

定义逆变换$\psi_\sigma: v'\to\psi_\sigma(v') = v$, 这样由图??, 可得$|v_*-\psi_\sigma(v')| = \frac{|v'-v_*|}{k'\cdot\sigma}$, 再令$v'=v$, 则有如下:

$$|v_*-\psi_\sigma(v)| = \frac{|v-v_*|}{k\cdot\sigma} \tag{8.3.6}$$

这样应用上面这些变换到(8.3.2)式左边的第一项(事实上,下面的运算只是形式的推导, 为了保证运算的合法性, 需要一列在球面上是可积的函数来逼近原函数B), 然后再令$v'=v$, 可得

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^n\times S^{n-1}} B(|v-v_*|, k\cdot\sigma)g(v_*)f^2(v')d\sigma dv \\
&= \int_{\mathbb{R}^n\times S^{n-1}} B(|v-v_*|, 2(k'\cdot\sigma)^2-1)g(v_*)f^2(v')\Big|\frac{dv}{dv'}\Big|d\sigma dv' \\
&= \int_{k'\cdot\sigma\geqslant\frac{1}{\sqrt{2}}} B(|\psi_\sigma(v')-v_*|, 2(k'\cdot\sigma)^2-1)g(v_*)f^2(v')\frac{2^{n-1}}{(k'\cdot\sigma)^2}d\sigma dv' \\
&= \int_{k\cdot\sigma\geqslant\frac{1}{\sqrt{2}}} B(|\psi_\sigma(v)-v_*|, 2(k\cdot\sigma)^2-1)g(v_*)f^2(v)\frac{2^{n-1}}{(k\cdot\sigma)^2}d\sigma dv
\end{aligned} \tag{8.3.7}$$

利用三角等式$2^{n-2}\sin^{n-2}\frac{\theta}{2}\cos^{n-2}\frac{\theta}{2}=\sin^{n-2}\theta$和球面积分公式, 有

$$\begin{aligned}&\int_{k\cdot\sigma\geqslant\frac{1}{\sqrt{2}}}B(|\psi_\sigma(v)-v_*|,2(k\cdot\sigma)^2-1)\frac{2^{n-1}}{(k\cdot\sigma)^2}d\sigma\\&=\int_{k\cdot\sigma\geqslant\frac{1}{\sqrt{2}}}B(\frac{|v-v_*|}{k\cdot\sigma},2(k\cdot\sigma)^2-1)\frac{2^{n-1}}{(k\cdot\sigma)^2}d\sigma\\&=|S^{n-2}|\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^{n-2}\theta B(\frac{|v-v_*|}{\cos\theta},\cos 2\theta)\frac{2^{n-1}}{\cos^2\theta}d\theta\\&=|S^{n-2}|\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-2}\frac{\theta}{2}B(\frac{|v-v_*|}{\cos\frac{\theta}{2}},\cos\theta)\frac{2^{n-2}}{\cos^2\frac{\theta}{2}}d\theta\\&=|S^{n-2}|\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^{n-2}\theta}{\cos^n\frac{\theta}{2}}B(\frac{|v-v_*|}{\cos\frac{\theta}{2}},\cos\theta)d\theta\end{aligned}\tag{8.3.8}$$

这样定义:

$$\begin{aligned}&A(v-v_*)\\&=S^{n-2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-2}\theta\Big(\frac{1}{\cos^n\frac{\theta}{2}}B(\frac{|v-v_*|}{\cos\frac{\theta}{2}},\cos\theta)-B(|v-v_*|,\cos\theta)\Big)d\theta.\end{aligned}\tag{8.3.9}$$

这样就完成了引理的证明. □

注记8.3.2. 事实上, 如果$B(|v-v_*|,k\cdot\sigma)=|v-v_*|^\gamma b(k\cdot\sigma)$, 那么

$$\begin{aligned}&A(v-v_*)\\&=S^{n-2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-2}\theta\Big(\frac{1}{\cos^n\frac{\theta}{2}}(\frac{|v-v_*|}{\cos\frac{\theta}{2}})^\gamma b(\cos\theta)-|v-v_*|^\gamma b(\cos\theta)\Big)d\theta\\&=S^{n-2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-2}\theta|v-v_*|^\gamma b(\cos\theta)(\frac{1}{\cos^{\gamma+n}\frac{\theta}{2}}-1)d\theta\end{aligned}\tag{8.3.10}$$

注意到$\gamma>-n$时,上式为正, 当$\gamma=-n$变为Coulomb 位势, 我们需要另外的更为细致的估计.

利用引理8.3.1可得如下: 如果$0\leqslant\gamma\leqslant 2$

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{R}^{2n}\times S^{n-1}}B(|v-v_*|,k\cdot\sigma)g(v_*)(f^2(v')-f^2(v))d\sigma dv dv_*\\&\leqslant C\|g\|_{L^1_2}\|f\|_{L^2_1}\end{aligned}\tag{8.3.11}$$

下面, 我们考虑(8.3.1)式中的第二项, 为了计算简单起见, 只考虑Maxwellian molecules情形下, 即cross section $B(|v-v_*|, k\cdot\sigma)=b(k\cdot\sigma)$.

引理8.3.3. 设$g\in L^1(\mathbb{R}^n)$, $f\in L^2(\mathbb{R}^n)$, 那么有如下的Plancherel 类型的等式:

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{R}^{2n}\times S^{n-1}} b(\frac{v-v_*}{|v-v_*|}\cdot\sigma)g(v_*)(f(v')-f(v))^2 d\sigma dv_* dv\\ &=\int_{\mathbb{R}^n\times S^{n-1}} b(\frac{\xi}{|\xi|}\cdot\sigma)\Big(\hat g(0)|\hat f(\xi)|^2+\hat g(0)|\hat f(\xi^+)|^2\\ &\qquad -\hat g(\xi^-)\hat f(\xi^+)\overline{\hat f(\xi)}-\overline{\hat g(\xi^-)}\overline{\hat f(\xi^+)}\hat f(\xi)\Big)d\xi d\sigma.\end{aligned} \tag{8.3.12}$$

证明. 在这里,为了运算方便, 我们还是不妨假设b可积的. 首先, 我们有

$$(f(v')-f(v))^2=f^2(v')-2f(v')f(v)+f^2(v). \tag{8.3.13}$$

对(8.3.13)式中的第二项$2f(v')f(v)$, 利用pre-post collision变量变换和Bobylev等式, 有

$$\begin{aligned}&\int b(k\cdot\sigma)g(v_*)f(v')f(v)d\sigma dv_* dv=\int Q^+(g,f)f dv=(Q^+(g,f),f)_{L^2}\\ &=(\mathcal{F}Q^+(g,f),\mathcal{F}f)_{L^2}=\frac12\int b(\frac{\xi}{|\xi|}\cdot\sigma)\hat g(\xi^-)\hat f(\xi^+)\overline{\hat f(\xi)}+\overline{\hat g(\xi^-)}\overline{\hat f(\xi^+)}\hat f(\xi)\Big)d\xi d\sigma\end{aligned} \tag{8.3.14}$$

对(8.3.13)式中的第三项$f^2(v)$, 利用$\int_{S^{n-1}} b(k\cdot\sigma)d\sigma$不依赖单位向量$k$, 我们有

$$\begin{aligned}&\int b(k\cdot\sigma)g(v_*)f^2(v)d\sigma dv_* dv=\int_{s^{n-1}} b(k\cdot\sigma)d\sigma\int_{\mathbb{R}^n} g(v_*)dv_*\int_{\mathbb{R}^n} f^2(v)dv\\ &=\int b(\frac{\xi}{|\xi|}\cdot\sigma)\hat g(0)|\hat f(\xi)|^2 d\xi d\sigma\end{aligned} \tag{8.3.15}$$

对(8.3.13)式中的第一项$f^2(v')$, 做变量变换$(v-v_*,v_*)\to(v_1,v_*)$, 然后令$v_1=v$, 最后类似于引理8.3.1的证明那样做变量变换$v\to v'$

$$\begin{aligned}&\int b(\frac{v-v_*}{|v-v_*|}\cdot\sigma)g(v_*)f^2(\frac{v+v_*}{2}+\frac{|v-v_*|}{2}\sigma)d\sigma dv_* dv\\ &=\int b(\frac{v_1}{|v_1|}\cdot\sigma)g(v_*)|\tau_{-v_*}f(\frac{v_1+|v_1|\sigma}{2})|^2 d\sigma dv_* dv_1\\ &=\int b(\frac{v}{|v|}\cdot\sigma)g(v_*)|\tau_{-v_*}f(\frac{v+|v|\sigma}{2})|^2 d\sigma dv_* dv\\ &=\int b(\psi(v',\sigma)g(v_*)\frac{2^{n-1}}{(\frac{v'}{|v'|}\cdot\sigma)^2}|\tau_{-v_*}f(v')|^2 d\sigma dv_* dv',\end{aligned} \tag{8.3.16}$$

其中

$$\psi(v',\sigma)=2(\frac{v'}{|v'|}\cdot\sigma)^2-1,\quad \tau_{-v_*}f=f(v_*+).$$

这样利用$\int_{S^{n-1}}b(k\cdot\sigma)$不依赖单位向量$k$和$|\mathcal{F}(\tau_h f)|=|\mathcal{F}(f)|$, 再类似于引理8.3.1的证明那样做变量变换$\xi\to\xi^+$, 可得

$$\begin{aligned}(8.3.16)&=\int g(v_*)\Big(\int b(\psi(\xi,\sigma)\frac{2^{n-1}}{(\frac{\xi}{|\xi|}\cdot\sigma)^2}|f(\xi)|^2d\sigma d\xi\Big)dv_*\\&=\hat g(0)\int b(\frac{\xi}{|\xi|}\cdot\sigma)|f(\xi^+)|^2d\sigma d\xi.\end{aligned}\tag{8.3.17}$$

这样综合(8.3.13),(8.3.14),(8.3.15)和(8.3.17), 可得(8.3.12). □

推论8.3.4. 设$g\in L^1(\mathbb{R}^n)$, $f\in L^2(\mathbb{R}^n)$, $f\geqslant 0$. 那么

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{R}^{2n}\times S^{n-1}}b(\frac{v-v_*}{|v-v_*|}\cdot\sigma)g(v_*)(f(v')-f(v))^2d\sigma dv_*dv\\&\geqslant\int_{\mathbb{R}^n}|\hat f(\xi)|^2\int_{S^{n-1}}b(\frac{\xi}{|\xi|}\cdot\sigma)(\hat g(0)-|\hat g(\xi^-)|)d\sigma d\xi\end{aligned}\tag{8.3.18}$$

证明. 利用引理8.3.3和如下不等式,

$$|\hat f(\xi^+)|^2+|\hat f(\xi)|^2\geqslant|\hat f(\xi)|^2$$

我们可得到推论8.3.4. □

引理8.3.5. 设b 满足(8.1.21), 常数C_g依赖于n, $\|g\|_{L^1_1}$, $\|g\|_{LlogL}$和b, 那么当$|\xi|\geqslant 1$时, 有

$$\int_{S^{n-1}}b(\frac{\xi}{|\xi|}\cdot\sigma)(\hat g(0)-|\hat g(\xi^-)|)d\sigma\geqslant C_g|\xi|^\nu\tag{8.3.19}$$

引理8.3.5是由如下两个引理的推论. 下面我们经常用到常数C_g表示依赖于n, $\|g\|_{L^1_1}$, $\|g\|_{LlogL}$和b.

引理8.3.6. 存在依赖于n, $\|g\|_{L^1_1}$和$\|g\|_{LlogL}$的常数$\tilde C_g$使得

$$\hat g(0)-\hat g(\xi)\geqslant\tilde C_g(|\xi|^2\wedge 1)\tag{8.3.20}$$

证明. 对某个$\theta \in \mathbb{R}$, 我们有

$$
\begin{aligned}
&\hat{g}(0)-\hat{g}(\xi)\\
&=\int_{\mathbb{R}^n} g(v)(1-\cos(v\cdot\xi+\theta))dv\\
&=2\int_{\mathbb{R}^n} g(v)\sin^2(\frac{v\cdot\xi+\theta}{2})dv\\
&\geqslant 2\sin^2\varepsilon\int_{|v|\leqslant r,\forall p\in\mathbb{Z},|v\cdot\xi+\theta-2p\pi|\geqslant 2\varepsilon} g(v)dv \qquad (8.3.21)\\
&\geqslant 2\sin^2\varepsilon\Big\{\|g\|_{L^1}-\frac{\|g\|_{L^1_1}}{r}-\int_{|v|\leqslant r,\forall p\in\mathbb{Z},|v\cdot\xi+\theta-2p\pi|\leqslant 2\varepsilon} g(v)dv\Big\}\\
&\geqslant 2\sin^2\varepsilon\Big\{\|g\|_{L^1}-\frac{\|g\|_{L^1_1}}{r}-\sup_{|A|\leqslant\frac{4\varepsilon}{|\xi|}(2r)^{n-1}(1+\frac{r|\xi|}{\pi})}\int_A g(v)dv\Big\}
\end{aligned}
$$

当$|\xi|\geqslant 1$, 取如下常数我们可得引理

$$
\tilde{C}_g=2\sin^2\varepsilon\Big\{\|g\|_{L^1}-\frac{\|g\|_{L^1_1}}{r}-\sup_{|A|\leqslant 4\varepsilon(2r)^{n-1}+\frac{2\varepsilon}{\pi}(2r)^n}\int_A g(v)dv\Big\} \qquad (8.3.22)
$$

当$|\xi|\leqslant 1$, 令$\delta=\frac{\varepsilon}{|\xi|}$, 取如下常数我们可得引理

$$
C_g=2\delta^2\inf_{|\xi|\leqslant 1}\frac{\sin^2(\delta|\xi|)}{\delta^2|\xi|^2}\Big\{\|g\|_{L^1}-\frac{\|g\|_{L^1_1}}{r}-\sup_{|A|\leqslant 4\varepsilon(2r)^{n-1}(1+\frac{r}{\pi})}\int_A g(v)dv\Big\} \qquad (8.3.23)
$$

□

引理8.3.7. 如果如下成立

$$
\sin^{n-2}\theta b(\cos\theta)\approx\frac{K(\nu)}{\theta^{1+\nu}}\quad 当\quad \theta\to 0,\ K(\nu)>0. \qquad (8.3.24)
$$

那么, 当$|\xi|\geqslant 1$, 我们有

$$
\int_{S^{n-1}} b(\frac{\xi}{|\xi|}\cdot\sigma)(|\xi^-|^2\wedge 1)d\sigma\geqslant K(\nu)|\xi|^\nu \qquad (8.3.25)
$$

证明. 我们首先注意到

$$
|\xi^-|^2=\frac{|\xi|^2}{2}(1-\frac{\xi}{|\xi|}\cdot\sigma)
$$

由球面坐标变换, 可找到某个$\theta_0 > 0$, 使得

$$\begin{aligned}&\int_{S^{n-1}} b(\frac{\xi}{|\xi|}\cdot\sigma)(|\xi^-|^2\wedge 1)d\sigma\\ &= S^{n-2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-2}\theta b(\cos\theta)\Big(\frac{|\xi|^2}{2}(1-\cos\theta)\wedge 1\Big)d\theta\\ &\geqslant \frac{K}{2}|S^{n-2}|\int_0^{\theta_0}(\frac{|\xi|^2\theta^2}{2}\wedge 1)\frac{d\theta}{\theta^{1+\nu}}\end{aligned} \tag{8.3.26}$$

作变量变换$\theta\to|\xi|\theta$, 可得(8.3.26)式中的积分为

$$|\xi|^\nu\int_0^{\theta_0}(\frac{\theta^2}{2}\wedge 1)\frac{d\theta}{\theta^{1+\nu}} \tag{8.3.27}$$

这样, 取如下常数可得引理

$$\frac{K}{2}|S^{n-2}|\int_0^{\theta_0}(\frac{\theta^2}{2}\wedge 1)\frac{d\theta}{\theta^{1+\nu}}$$

□

这样利用引理8.3.3, 推论8.3.4和引理8.3.5可得关于(8.3.1)式中的第二项有如下的下界

$$\int_{\mathbb{R}^{2n}\times S^{n-1}} b(\frac{v-v_*}{|v-v_*|}\cdot\sigma)g(v_*)(f(v')-f(v))^2 d\sigma dv_* dv \geqslant C_g\|f\|^2_{H^{\nu/2}} \tag{8.3.28}$$

§8.4 没有角截断假设下弱解的正则性

本节主要给出本章第三节内容的应用, 将要证明如下没有角截断假设下齐次空间情形下Boltzmann方程的弱解的正则性.

$$\begin{cases}\partial_t f(t,v) = Q(f,f)(t,v), & t\geqslant 0, v\in\mathbb{R}^n,\\ f(0,v) = f_0(v),\end{cases} \tag{8.4.1}$$

其中cross section B满足

$$B(|v-v_*|,\frac{v-v_*}{|v-v_*|}\cdot\sigma) = |v-v_*|^\gamma b(\frac{v-v_*}{|v-v_*|}\cdot\sigma)$$

$$\sin^{n-2}\theta b(\cos\theta)\approx\frac{K(\nu)}{\theta^{1+\nu}} \quad 当\quad \theta\to 0,\ K(\nu)>0.$$

由(8.2.4), 我们可得Cauchy问题(8.4.1)的解$f(t,v)$满足如下的质量, 动量和动能守恒

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(t,v)dv = \int_{\mathbb{R}^n} f_0(v)dv \tag{8.4.2}$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(t,v)v_j dv = \int_{\mathbb{R}^n} f_0(v)v_j dv,\ \ j=1,2...n \tag{8.4.3}$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(t,v)\frac{|v|^2}{2}dv = \int_{\mathbb{R}^n} f_0(v)\frac{|v|^2}{2}dv \tag{8.4.4}$$

关于Cauchy问题(8.4.1)的熵弱解的存在性, Villani[162]在1998年得到当初始值的质量, 动量和动能满足如下自然的条件下:

$$\int_{\mathbb{R}^n} f_0(v)[1+|v|^2+\log(1+f_0(v))]dv < +\infty, \tag{8.4.5}$$

则可以构造出如下的一种熵弱解$f(t,v)$:

$$f(t,v)\geqslant 0, f(t,v)\in C(\mathbb{R}^+,\mathcal{S}'); t\geqslant 0, f(t,v)\in L^1_2\bigcap L\log L$$

$$f(t,v)\in L^1([0,T];L^1_{2+\gamma}), f(0,v)=f_0(v)$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(t,v)\psi(v)dv = \int_{\mathbb{R}^n} f_0(v)\psi(v)dv,\ \ \psi(v)=1, v_j, \frac{|v|^2}{2}$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(t,v)\log f(t,v)dv \leqslant \int_{\mathbb{R}^n} f_0(v)\log f_0(v)dv$$

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{R}^n} f(t,v)\varphi(t,v)dv - \int_{\mathbb{R}^n} f_0(v)\varphi(0,v)dv - \int_0^t d\tau\int_{\mathbb{R}^n} f(\tau,v)\partial_\tau\varphi(\tau,v)dv\\ &= \int_0^t d\tau\int_{\mathbb{R}^n} Q(f,f)(\tau,v)\varphi(\tau,v)dv,\ \ \forall\varphi(t,v)\in C^1(\mathbb{R}^+;C_0^\infty(\mathbb{R}^n))\end{aligned}$$

由于上式右边最后的积分可以被如下定义

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{R}^n} Q(f,f)(\tau,v)\varphi(\tau,v)dv\\ &=\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^{2n}}\int_{S^{n-1}} Bf(v_*)f(v)(\varphi(v_*')+\varphi(v')-\varphi(v_*)-\varphi(v))dvdv_*d\sigma\end{aligned}$$

由此可得试验函数φ可属于空间$L^\infty([0,T];W^{2,\infty})$.

这样本节将要研究: 如果Cauchy问题(8.4.1)的熵弱解已经存在性, 且满足如下的自然的条件

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(t,v)[1+|v|^2+\log(1+f(t,v))]dv < +\infty, \tag{8.4.6}$$

那么此熵弱解是否具有正则性, 即如果初始值不光滑, 那么当$t>0$时, 熵弱解$f(t,v)$是否关于v是光滑的呢? 本节将证明在Maxwellian molecules情形下, 即cross section $B(|v-v_*|,k\cdot\sigma)=b(k\cdot\sigma)$, Cauchy问题(8.4.1)的熵弱解属于空间$H_v^{+\infty}$; 对于hard potentials, 目前只有在modified hard potentials情形有些结果, 感兴趣的读者可以参看[4, 36, 65]. 对于soft potentials情形, 目前基本上没有结果. 本节主要介绍一种称为乘子的方法, 即首先构造一个（一组）合适的乘子, 然后主要考虑乘子对应的拟微分算子和碰撞算子$Q(f,f)$组成的交换子的估计.

首先, 我们介绍一种称为二进制分解的方法, 可参看文献[3]. 二进制分解如同第一章第三节定义的那样: $\operatorname{supp}\varphi_k\subset\{\xi:\ 2^{k-1}\leqslant|\xi|\leqslant 2^{k+1}\}$, $k\in\mathbb{N}$, $\operatorname{supp}\varphi_0\subset\{\xi:\ |\xi|\leqslant 2\}$, $\sum_{k=0}^{\infty}\varphi_k=1$; 不妨假设$\varphi_k$是径向函数, 即存在径向函数$\tilde\varphi$满足$\tilde\varphi_k(|\xi|)=\varphi_k(\xi)$. 此外还假设: 对于多重指标$\alpha$, 存在常数$C_\alpha$使得如下成立

$$2^{k|\alpha|}|D^\alpha\varphi_k(\xi)|\leqslant C_\alpha,\quad k=0,1,2...;\ \xi\in\mathbb{R}^n. \tag{8.4.7}$$

定义二进制分解算子

$$\widehat{\triangle_k f}(\xi)=\varphi_k(\xi)\hat f(\xi),\quad k=0,1,2...;\ \xi\in\mathbb{R}^n.$$

引理8.4.1. *假设初始值$f_0(v)$ 满足(8.4.5),cross section $B(|v-v_*|,k\cdot\sigma)=b(k\cdot\sigma)$, 而且*

$$\sin^{n-2}\theta b(\cos\theta)\approx\frac{K}{\theta^{1+\nu}}\quad 当\quad \theta\to 0,\ K>0. \tag{8.4.8}$$

令$f(t,v)$是Cauchy问题(8.4.1)的熵弱解, 且满足(8.4.6), 那么有

$$(\triangle_k Q(f,f),\triangle_k f)_{L^2}-(Q(f,\triangle_k f),\triangle_k f)_{L^2}\leqslant C\|f_0\|_{L^1}(\sum_{j=k-2}^{k+1}\|\triangle_k f\|_{L^2}) \tag{8.4.9}$$

$$(\triangle_k f,\triangle_k Q(f,f))_{L^2}-(\triangle_k f,Q(f,\triangle_k f))_{L^2}\leqslant C\|f_0\|_{L^1}(\sum_{j=k-2}^{k+1}\|\triangle_k f\|_{L^2}) \tag{8.4.10}$$

注记8.4.2. *根据弱解的定义, 如果$f(t,v)$是弱解, 我们选取$\triangle_k f$作为试验函数($\triangle_k f\in L^\infty([0,T];W^{2,\infty})$), 这样保证了(8.4.9)和(8.4.10)式中左边的内积是有意义的.因为除非$f\in H^2(\mathbb{R}^n)$, 否则直接选取$f(t,v)$作为试验函数是没有意义的. 这实际上也是我们为什么要用乘子方法的原因, 主要是保证运算是有意义的.*

证明.

我们只需证明(8.4.9), (8.4.10)的证明与之相类似. 首先用Fourier变换作用于Boltzmann方程(8.4.1)上, 那么由(8.2.19)和(8.2.20) (Bobylev等式) 可得

$$\partial_t \hat{f}(\xi) = \widehat{Q(f,f)}(\xi) = \int_{S^{n-1}} b(\frac{\xi}{|\xi|}\cdot\sigma)\Big(\hat{f}(\xi^-)\hat{f}(\xi^+) - \hat{f}(0)\hat{f}(\xi)\Big)d\sigma \tag{8.4.11}$$

(8.4.11)式两边乘$\varphi_k(\xi)$, 可得

$$\begin{aligned}\partial_t \widehat{\triangle_k f}(\xi) &= \triangle_k \widehat{Q(f,f)}(\xi)\\ &= \int_{S^{n-1}} b(\frac{\xi}{|\xi|}\cdot\sigma)\Big(\hat{f}(\xi^-)\hat{f}(\xi^+)\varphi_k(\xi) - \hat{f}(0)\hat{f}(\xi)\varphi_k(\xi)\Big)d\sigma\end{aligned} \tag{8.4.12}$$

那么,

$$\begin{aligned}&\partial_t(\widehat{\triangle_k f}, \widehat{\triangle_k f})_{L^2} = (\triangle_k\widehat{Q(f,f)}, \widehat{\triangle_k f})_{L^2} + (\widehat{\triangle_k f}, \triangle_k\widehat{Q(f,f)})_{L^2}\\ &= \int_{\mathbb{R}^n}(\partial_t\widehat{\triangle_k f})\overline{\widehat{\triangle_k f}}d\xi + \int_{\mathbb{R}^n}\widehat{\triangle_k f}\partial_t\overline{\widehat{\triangle_k f}}d\xi\\ &= \int_{\mathbb{R}^n}\int_{S^{n-1}} b(\frac{\xi}{|\xi|}\cdot\sigma)\Big(\hat{f}(\xi^-)\hat{f}(\xi^+)\varphi_k^2(\xi)\overline{\hat{f}}(\xi) - \hat{f}(0)\hat{f}(\xi)\varphi_k^2(\xi)\overline{\hat{f}}(\xi)\Big)d\sigma d\xi\\ &+ \int_{\mathbb{R}^n}\int_{S^{n-1}} b(\frac{\xi}{|\xi|}\cdot\sigma)\Big(\overline{\hat{f}}(\xi^-)\overline{\hat{f}}(\xi^+)\varphi_k^2(\xi)\hat{f}(\xi) - \overline{\hat{f}}(0)\overline{\hat{f}}(\xi)\varphi_k^2(\xi)\hat{f}(\xi)\Big)d\sigma d\xi\end{aligned} \tag{8.4.13}$$

此外, 我们有

$$\widehat{Q(f,\triangle_k f)}(\xi) = \int_{S^{n-1}} b(\frac{\xi}{|\xi|}\cdot\sigma)\Big(\hat{f}(\xi^-)\varphi_k(\xi^+)\hat{f}(\xi^+) - \hat{f}(0)\varphi_k(\xi)\hat{f}(\xi)\Big)d\sigma \tag{8.4.14}$$

$$\begin{aligned}&(\widehat{Q(f,\triangle_k f)}, \widehat{\triangle_k f})_{L^2} + (\widehat{\triangle_k f}, \widehat{Q(f,\triangle_k f)})_{L^2}\\ &= \int\int b(\frac{\xi}{|\xi|}\cdot\sigma)\Big(\hat{f}(\xi^-)\varphi_k(\xi^+)\hat{f}(\xi^+)\varphi_k(\xi)\overline{\hat{f}}(\xi) - \hat{f}(0)\hat{f}(\xi)\varphi_k^2(\xi)\overline{\hat{f}}(\xi)\Big)d\sigma d\xi\\ &+ \int\int b(\frac{\xi}{|\xi|}\cdot\sigma)\Big(\overline{\hat{f}}(\xi^-)\varphi_k(\xi^+)\overline{\hat{f}}(\xi^+)\varphi_k(\xi)\hat{f}(\xi) - \overline{\hat{f}}(0)\overline{\hat{f}}(\xi)\varphi_k^2(\xi)\hat{f}(\xi)\Big)d\sigma d\xi\end{aligned} \tag{8.4.15}$$

那么, 由(8.4.13)和(8.4.15)可得

$$\begin{aligned}&(\triangle_k\widehat{Q(f,f)}, \widehat{\triangle_k f})_{L^2} - (\widehat{Q(f,\triangle_k f)}, \widehat{\triangle_k f})_{L^2}\\ &= \int_{\mathbb{R}^n}\int_{S^{n-1}} b(\frac{\xi}{|\xi|}\cdot\sigma)\hat{f}(\xi^-)\hat{f}(\xi^+)(\varphi_k(\xi) - \varphi_k(\xi^+))\varphi_k(\xi)\overline{\hat{f}}(\xi)d\sigma d\xi\end{aligned} \tag{8.4.16}$$

首先由ξ^+和ξ^-的定义, 有

$$\xi^+ = \frac{\xi+|\xi|\sigma}{2},\ |\xi^+| = |\xi|\cos\frac{\theta}{2},\ \frac{\xi}{|\xi|}\cdot\sigma = \cos\theta, 0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}$$

$$\frac{|\xi|^2}{2}\leqslant|\xi^+|^2\leqslant|\xi|^2, |\xi|^2-|\xi^+|^2 = |\xi^-|^2 = |\xi|^2\sin^2\frac{\theta}{2}$$

在上(8.4.16)式积分中注意到$2^{k-1}\leqslant|\xi|\leqslant 2^{k+1}$, 由$\xi^+$的定义可得$2^{k-2}\leqslant|\xi^+|\leqslant 2^{k+1}$. 那么

$$\hat f(\xi^+) = \widehat{\triangle_{k-2} f}(\xi^+) + \widehat{\triangle_{k-1} f}(\xi^+) + \widehat{\triangle_k f}(\xi^+) + \widehat{\triangle_{k+1} f}(\xi^+) \tag{8.4.17}$$

利用$|\hat f(\xi^-)|\leqslant\|f\|_{L^1}\leqslant\|f_0\|_{L^1}$, 可得(8.4.16)可以被如下控制

$$\|f_0\|_{L^1}\int_{2^{k-1}\leqslant|\xi|\leqslant 2^{k+1}}\int_{S^{n-1}} b(\frac{\xi}{|\xi|}\cdot\sigma)|\widehat{\triangle_k f}(\xi^+)||A_\xi^k||\widehat{\triangle_k f}(\xi)|d\sigma d\xi \tag{8.4.18}$$

$$+\|f_0\|_{L^1}\int_{2^{k-1}\leqslant|\xi|\leqslant 2^{k+1}}\int_{S^{n-1}} b(\frac{\xi}{|\xi|}\cdot\sigma)|\widehat{\triangle_{k-2} f}(\xi^+)||A_\xi^k||\widehat{\triangle_k f}(\xi)|d\sigma d\xi \tag{8.4.19}$$

$$+\|f_0\|_{L^1}\int_{2^{k-1}\leqslant|\xi|\leqslant 2^{k+1}}\int_{S^{n-1}} b(\frac{\xi}{|\xi|}\cdot\sigma)|\widehat{\triangle_{k-1} f}(\xi^+)||A_\xi^k||\widehat{\triangle_k f}(\xi)|d\sigma d\xi \tag{8.4.20}$$

$$+\|f_0\|_{L^1}\int_{2^{k-1}\leqslant|\xi|\leqslant 2^{k+1}}\int_{S^{n-1}} b(\frac{\xi}{|\xi|}\cdot\sigma)|\widehat{\triangle_{k+1} f}(\xi^+)||A_\xi^k||\widehat{\triangle_k f}(\xi)|d\sigma d\xi \tag{8.4.21}$$

由(8.4.7), 可得

$$\begin{aligned}|A_\xi^k| &= |\varphi_k(\xi)-\varphi_k(\xi^+)|\leqslant|\tilde\varphi_k(|\xi|)-\tilde\varphi_k(|\xi^+|)|\\ &\lesssim\frac{1}{2^k}(|\xi|-|\xi^+|)\lesssim\frac{1}{2^k}\frac{|\xi|^2-|\xi^+|^2}{|\xi|+|\xi^+|}\lesssim\sin^2\frac{\theta}{2}\end{aligned} \tag{8.4.22}$$

我们只估计(8.4.18)式, (8.4.19)-(8.4.21)的估计可以类似地得到. 利用(8.4.22)和Hölder 不等式, 可得(8.4.18)式被控制如下

$$\begin{aligned}&\|f_0\|_{L^1}\int_{2^{k-1}\leqslant|\xi|\leqslant 2^{k+1}}\int_{S^{n-1}} b(\frac{\xi}{|\xi|}\cdot\sigma)|\widehat{\triangle_k f}(\xi^+)||A_\xi^k||\widehat{\triangle_k f}(\xi)|d\sigma d\xi\\ &\lesssim\|f_0\|_{L^1}\int_{\mathbb{R}^n}|\widehat{\triangle_k f}(\xi)|\int_{S^{n-1}} b(\frac{\xi}{|\xi|}\cdot\sigma)\sin^2\frac{\theta}{2}|\widehat{\triangle_k f}(\xi^+)|d\sigma d\xi\\ &\lesssim\|f_0\|_{L^1}\Big(\int|\widehat{\triangle_k f}(\xi)|^2 d\xi\Big)^{1/2}\Big\{\int\Big(\int b(\frac{\xi}{|\xi|}\cdot\sigma)\sin^2\frac{\theta}{2}|\widehat{\triangle_k f}(\xi^+)|d\sigma\Big)^2 d\xi\Big\}^{1/2}\\ &\lesssim\|f_0\|_{L^1}\|\triangle_k f\|_{L^2}^2\end{aligned} \tag{8.4.23}$$

其中上式倒数第二项中最后的积分可以类似于引理8.3.1的证明那样做变量变化$\xi^+ \to \xi$来得到估计. □

定理 8.4.3. 在引理8.4.1的条件下, 如果$f(t,v)$是Cauchy问题(8.4.1)的熵弱解, 且满足(8.4.6), 那么对任意的$s\in\mathbb{R}^+$, $t>0$, 有$f(t,v)\in H^s(\mathbb{R}^n)$.

证明. 首先, 有

$$\partial_t\|\triangle_k f\|_{L^2} = (\triangle_k\widehat{Q(f,f)}, \widehat{\triangle_k f})_{L^2} + (\widehat{\triangle_k f}, \triangle_k\widehat{Q(f,f)})_{L^2} \tag{8.4.24}$$

此外, 由本章第三节可得

$$\begin{aligned}
&\Big(Q(f,\triangle_k f), \triangle_k f\Big)_{L^2}\\
&= \int_{\mathbb{R}^{2n}\times S^{n-1}} b(\frac{v-v_*}{|v-v_*|}\cdot\sigma) f(v_*)\triangle_k f(v)(\triangle_k f(v') - \triangle_k f(v))d\sigma dv_* dv\\
&= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^{2n}\times S^{n-1}} b(\frac{v-v_*}{|v-v_*|}\cdot\sigma) f(v_*)((\triangle_k f)^2(v') - (\triangle_k f)^2(v))d\sigma dv_* dv\\
&- \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^{2n}\times S^{n-1}} b(\frac{v-v_*}{|v-v_*|}\cdot\sigma) f(v_*)(\triangle_k f(v') - \triangle_k f(v))^2 d\sigma dv_* dv\\
&= I_1 - I_2
\end{aligned} \tag{8.4.25}$$

对(8.4.25)中的第一项, 由本章第三节中的引理8.3.1, 可得

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_{\mathbb{R}^{2n}\times S^{n-1}} b(k\cdot\sigma)((\triangle_k f)^2(v') - (\triangle_k f)^2(v))d\sigma dv dv_*\\
&= A\int_{\mathbb{R}^n} (\triangle_k f)^2(v_*)dv_*
\end{aligned} \tag{8.4.26}$$

其中

$$A = S^{n-2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2}\theta\Big(\frac{1}{\cos^n\frac{\theta}{2}} - 1\Big)b(\cos\theta)d\theta \tag{8.4.27}$$

利用$1-\cos^n\frac{\theta}{2} \leqslant n(1-\cos\frac{\theta}{2}) = 2n\sin^2\frac{\theta}{4}$, 有

$$I_1 \lesssim \|\triangle_k f\|_{L^2}^2 \tag{8.4.28}$$

对(8.4.25)中的第二项, 由本章第三节中的推论8.3.4和引理8.3.5, 可得

$$\begin{aligned}
I_2 &= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^{2n}\times S^{n-1}} b(\frac{v-v_*}{|v-v_*|}\cdot\sigma) f(v_*)(\triangle_k f(v') - \triangle_k f(v))^2 d\sigma dv_* dv\\
&\geqslant C_{f_0}\int_{\mathbb{R}^n}(1+|\xi|^\nu)\varphi_k(\xi)\hat{f}(\xi)d\xi \geqslant C_{f_0}\|\triangle_k f\|_{H^{\frac{\nu}{2}}}^2.
\end{aligned} \tag{8.4.29}$$

这样利用(8.4.24), (8.4.25), (8.4.25), (8.4.29)和引理8.4.1, 可得

$$\partial_t\|\triangle_k f\|_{L^2}+C_{f_0}\|\triangle_k f\|^2_{H^{\frac{\nu}{2}}}\leqslant C\|f_0\|_{L^1}(\sum_{j=k-2}^{k+1}\|\triangle_j f\|^2_{L^2}) \tag{8.4.30}$$

(8.4.30)式两边除以2^{kn}, 有

$$\begin{aligned}&\frac{\partial_t\|\triangle_k f\|_{L^2}}{2^{kn}}+(C_{f_0}2^{k\nu}-C\|f_0\|_{L^1})\frac{\|\triangle_k f\|^2_{L^2}}{2^{kn}}\\&\leqslant C\|f_0\|_{L^1}\Big(\frac{\|\triangle_{k-2}f\|^2_{L^2}}{2^{(k-2)n}}+\frac{\|\triangle_{k-1}f\|^2_{L^2}}{2^{(k-1)n}}+\frac{\|\triangle_{k+1}f\|^2_{L^2}}{2^{(k+1)n}}\Big)\end{aligned} \tag{8.4.31}$$

令$U_k(t)=\frac{\|\triangle_k f\|^2_{L^2}}{2^{kn}}$, $C_k=C_{f_0}2^{k\nu}-C\|f_0\|_{L^1}$ 和$\beta=C\|f_0\|_{L^1}$, 那么上式变为:

$$\partial_t U_k(t)+C_kU_k(t)\leqslant\beta(U_{k-2}(t)+U_{k-1}(t)+U_{k+1}(t)) \tag{8.4.32}$$

利用Bernstein不等式(Polyya Plancherel Nikoolski不等式)可得 $\|\triangle_k f\|_{L^2}\leqslant C(\varphi)2^{nk}\|\triangle_k f\|_{L^1}\leqslant C(\varphi)2^{nk}\|f\|_{L^1}\leqslant C(\varphi)2^{nk}\|f_0\|_{L^1}$. 这样定义$M=C(\varphi)\|f_0\|_{L^1}$, 我们有

$$U_k(t)\leqslant M,\ \ k\geqslant 0, t\geqslant 0. \tag{8.4.33}$$

由C_k的定义可得当k充分大时, $C_k\geqslant 0$, 且是非减的,所以不妨假设给定$k_0\geqslant 3$, 使得当$k\geqslant k_0$时, $C_k\geqslant 0$. 由(8.4.32)和(8.4.33), 可得$U_k(t)$满足如下引理8.4.4的条件, 那么对任意的整数$p\geqslant 1$, 存在常数A_p, D_p 使得当$k\geqslant 2(p-1)+k_0+2$时,有

$$U_k(t)\leqslant MA_pe^{-C_{k-2(p-1)}t}+MD_p\frac{1}{(C_{k-2(p-1)})^p}, t\geqslant 0 \tag{8.4.34}$$

那么给定$s>0$ 和$t>0$, 对待定整数p, 由Sobolev空间的定义, 我们有

$$\begin{aligned}\|f\|^2_{H^s}&\sim\sum_{k=0}^{\infty}2^{2ks}\|\triangle_k f\|^2_{L^2}\\&=\sum_{k=0}^{2(p-1)+k_0+1}2^{2ks}\|\triangle_k f\|^2_{L^2}+\sum_{k=2(p-1)+k_0+2}^{\infty}2^{2ks}\|\triangle_k f\|^2_{L^2}\\&=\sum_{k=0}^{2(p-1)+k_0+1}2^{2ks}\|\triangle_k f\|^2_{L^2}+\sum_{k=2(p-1)+k_0+2}^{\infty}2^{k(2s+n)}U_k\end{aligned} \tag{8.4.35}$$

为了证明$f \in H^s$, 我们只需证明上式中的第二个级数是收敛的即可. 这样由(8.4.34)式可得

$$\begin{aligned} &\sum_{k=2(p-1)+k_0+2}^{\infty} 2^{k(2s+n)} U_k \\ \leqslant &\sum_{k=2(p-1)+k_0+2}^{\infty} 2^{k(2s+n)} M A_p e^{-C_{k-2(p-1)}t} \\ + &\sum_{k=2(p-1)+k_0+2}^{\infty} 2^{k(2s+n)} M D_p \frac{1}{(C_{k-2(p-1)})^p} \end{aligned} \tag{8.4.36}$$

由C_k的定义可得

$$C_{k-2(p-1)} \sim C(f_0, p) 2^{k\nu p}, \text{ 当}k\text{充分大} \tag{8.4.37}$$

选择待定整数p使得$\nu p \geqslant 2s + n + 1$, 这样使得上式中的两个级数是收敛的. □

引理8.4.4. (一个迭代结果) 令β, M是两个正数, k_0是给定的正整数. 假设$\{C_k\}_{k\geqslant k_0}$是一列正数组成的序列, 且是非降数列, 满足: 存在一个正数α使得当$k \geqslant k_0$时有$C_{k+1} - C_k \geqslant \alpha$. 假设另一个序列$\{U_k\}_{k\geqslant k_0} = \{U_k(t)\}_{k\geqslant k_0}$, $t \in \mathbb{R}^+$ 满足:

$$\partial_t U_k(t) + C_k U_k(t) \leqslant \beta(U_{k-2}(t) + U_{k-1}(t) + U_{k+1}(t))$$

$$0 \leqslant U_k(t) \leqslant M, \ \forall k \geqslant k_0 + 2, \forall t \geqslant 0.$$

那么对任意的整数$p \geqslant 1$, 存在常数A_p, D_p 使得当$k \geqslant 2(p-1) + k_0 + 2$时,有

$$U_k(t) \leqslant M A_p e^{-C_{k-2(p-1)}t} + M D_p \frac{1}{(C_{k-2(p-1)})^p}, t \geqslant 0$$

证明. 用数学归纳法可得此引理. □

下面我们介绍另外一种乘子方法, 关于具体细节, 有兴趣的读者可以参看文献[115]. 方便起见, 我们只考虑空间维数$n = 3$. 如果$f(t,v)$是Cauchy问题(8.4.1)的熵弱解, 那么给定时间$T_0 > 0$, 我们有$f(t,v) \in L^1(\mathbb{R}^3) \subset H^{-2}(\mathbb{R}^3)$, $t \in [0, T_0]$. 对$t \in [0, T_0]$, $N > 0, 0 < \delta < 1$, 定义乘子:

$$M_\delta(t,\xi) = (1 + |\xi|^2)^{\frac{Nt-4}{2}} (1 + \delta|\xi|^2)^{-N_0}, \ N_0 = \frac{NT_0 + 4}{2}$$

那么$M_\delta(t,\xi)$对应的拟微分算子为

$$M_\delta(t,D_v)=\mathcal{F}^{-1}M_\delta(t,\xi)\mathcal{F}$$

当$\delta\in(0,1)$, 有

$$M_\delta(t,D_v)f\in L^\infty([0,T_0];W^{2,\infty}(\mathbb{R}^3))$$

引理8.4.5. 在引理8.4.1的条件下, 如果$f(t,v)$是Cauchy问题(8.4.1)的熵弱解, 且满足(8.4.6), 那么

$$(Q(f,f),M_\delta^2 f)_{L^2}-(Q(f,M_\delta f),M_\delta f)_{L^2}\leqslant C\|f_0\|_{L^1}\|M_\delta^2 f\|_{L^2} \tag{8.4.38}$$

其中常数C和$0<\delta<1$无关.

证明. 类似于引理8.4.1的证明, 我们有

$$\begin{aligned}&(Q(f,f),M_\delta^2 f)_{L^2}-(Q(f,M_\delta f),M_\delta f)_{L^2}\\=&(\widehat{Q(f,f)},\widehat{M_\delta^2 f})_{L^2}-(\widehat{Q(f,M_\delta f)},\widehat{M_\delta f})_{L^2}\\=&\int_{\mathbb{R}^n}\int_{S^{n-1}}b(\frac{\xi}{|\xi|}\cdot\sigma)\hat{f}(\xi^-)\hat{f}(\xi^+)(M_\delta(t,\xi)-M_\delta(t,\xi^+))M_\delta(t,\xi)\overline{\hat{f}}(\xi)d\sigma d\xi\end{aligned} \tag{8.4.39}$$

为了得到(8.4.38), 我们只需证明如下:

$$M_\delta(t,\xi)-M_\delta(t,\xi^+)\leqslant N_0 2^{\frac{NT_0+4}{2}}M_\delta(t,\xi^+)\sin^2\frac{\theta}{2} \tag{8.4.40}$$

首先定义

$$\tilde{M}_\delta(t,s)=(1+s)^{\frac{Nt-4}{2}}(1+\delta s)^{-N_0},\quad s=|\xi|^2,s^+=|\xi^+|^2$$

我们有

$$M_\delta(t,\xi)=\tilde{M}_\delta(t,|\xi|^2).$$

这样, 由中值定理, 可得存在$s^+<\tilde{s}<s$使得

$$\tilde{M}_\delta(t,s)-\tilde{M}_\delta(t,s^+)=\frac{\partial\tilde{M}_\delta}{\partial s}(t,\tilde{s})(s-s^+)$$

利用$\tilde{M}_\delta$的定义可得

$$\frac{\partial\tilde{M}_\delta}{\partial s}(t,s)=\Big(\frac{Nt-4}{2(1+s)}-\frac{\delta N_0}{1+\delta s}\Big)\tilde{M}_\delta(t,s)$$

那么由如下

$$\frac{s}{1+s}, \frac{\delta s}{1+\delta s} \leqslant 1; \Big|\frac{\tilde{M}_\delta(t,\tilde{s})}{\tilde{M}_\delta(t,s^+)}\Big| \leqslant 2^{\frac{NT_0+4}{2}}, s-s^+ = s\sin^2\frac{\theta}{2}$$

可得

$$\tilde{M}_\delta(t,s) - \tilde{M}_\delta(t,s^+) \leqslant N_0 2^{\frac{NT_0+4}{2}} \tilde{M}_\delta(t,s^+)\sin^2\frac{\theta}{2}$$

这样就有

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^n}\int_{S^{n-1}} b(\frac{\xi}{|\xi|}\cdot\sigma)\hat{f}(\xi^-)\hat{f}(\xi^+)(M_\delta(t,\xi)-M_\delta(t,\xi^+))M_\delta(t,\xi)\overline{\hat{f}}(\xi)d\sigma d\xi\\
&\leqslant \int_{\mathbb{R}^n}\int_{S^{n-1}} b(\frac{\xi}{|\xi|}\cdot\sigma)\sin^2\frac{\theta}{2}|\hat{f}(\xi^-)||\hat{f}(\xi^+)|M_\delta(t,\xi^+)M_\delta(t,\xi)|\overline{\hat{f}}(\xi)|d\sigma d\xi\\
&\leqslant C\|f_0\|_{L^1}\|M_\delta f\|_{L^2}^2
\end{aligned} \tag{8.4.41}$$

□

这样利用引理8.4.5, 我们给出定理8.4.3的另一种证明. 首先我们知道对任意弱解f, 有$M_\delta^2 f \in L^\infty([0,T_0];W^{2,\infty}(\mathbb{R}^3))$, $M_\delta f \in C([0,T_0];L^2(\mathbb{R}^3))$. 由弱解的定义, 选取$\psi(t,v) = M_\delta^2 f(t,v)$作为试验函数, 有

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^3} f(t,v)M_\delta^2 f(t,v)dv - \int_{\mathbb{R}^3} f_0(v)M_\delta^2 f(0,v)dv - \int_0^t d\tau\int_{\mathbb{R}^3} f(\tau,v)\partial_\tau(M_\delta^2 f(\tau,v))dv\\
&= \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^3} Q(f,f)(\tau,v)M_\delta^2 f(\tau,v)dv
\end{aligned} \tag{8.4.42}$$

而且, 我们有

$$\begin{aligned}
&\int_0^t d\tau\int_{\mathbb{R}^3} f(\tau,v)\partial_\tau(M_\delta^2 f(\tau,v))dv\\
&=\lim_{h\to 0}\int_0^t d\tau\int_{\mathbb{R}^3}(f(\tau,v)+f(\tau+h,v))\frac{M_\delta^2 f(\tau+h,v)-M_\delta^2 f(\tau,v)}{2h}dv\\
&=\lim_{h\to 0}\int_0^t d\tau\int_{\mathbb{R}^3}\Big\{\Big(M_\delta(\tau+h)f(\tau,v)+M_\delta(\tau+h)f(\tau+h,v)\Big)\frac{M_\delta f(\tau+h,v)}{2h}\\
&\qquad\qquad -\Big(M_\delta(\tau)f(\tau,v)+M_\delta(\tau)f(\tau+h,v)\Big)\frac{M_\delta f(\tau,v)}{2h}\Big\}dv\\
&=\lim_{h\to 0}\int_0^t d\tau\int_{\mathbb{R}^3}\frac{(M_\delta f)^2(\tau+h,v)-(M_\delta f)^2(\tau,v)}{2h}dv\\
&+\lim_{h\to 0}\int_0^t d\tau\int_{\mathbb{R}^3}\frac{1}{2h}\Big\{M_\delta(\tau+h)(f(\tau,v))M_\delta(\tau+h)(f(\tau+h,v))\\
&\qquad\qquad -M_\delta(\tau)(f(\tau,v))M_\delta(\tau)f(\tau+h,v))\Big\}dv\\
&=J_1+J_2
\end{aligned}\tag{8.4.43}$$

首先对J_1, 有

$$\begin{aligned}
J_1&=\lim_{h\to 0}\int_0^t d\tau\int_{\mathbb{R}^3}\frac{(M_\delta f)^2(\tau+h,v)-(M_\delta f)^2(\tau,v)}{2h}dv\\
&=\lim_{h\to 0}\frac{1}{2h}\Big\{\int_0^{t+h}d\tau-\int_0^h d\tau\Big\}\int_{\mathbb{R}^3}(M_\delta f)^2(\tau,v)dv\\
&=\frac12\int_{\mathbb{R}^3}(M_\delta f)^2(t,v)dv-\frac12\int_{\mathbb{R}^3}(M_\delta f)^2(0,v)dv
\end{aligned}\tag{8.4.44}$$

对J_2, 有

$$\begin{aligned}
J_2&=\lim_{h\to 0}\int_0^t d\tau\int_{\mathbb{R}^3}\frac{1}{2h}\Big\{M_\delta(\tau+h)(f(\tau,v))M_\delta(\tau+h,v)(f(\tau+h,v))\\
&\qquad\qquad -M_\delta(\tau)(f(\tau,v))M_\delta(\tau)f(\tau+h,v))\Big\}dv\\
&=\lim_{h\to 0}\int_0^t d\tau\int_{\mathbb{R}^3}\frac{1}{2h}\Big\{f(\tau,v)M_\delta^2(\tau+h,v)(f(\tau+h,v))\\
&\qquad\qquad -f(\tau,v)M_\delta^2(\tau)f(\tau+h,v))\Big\}dv\\
&=\lim_{h\to 0}\int_0^t d\tau\int_{\mathbb{R}^3}\frac{1}{2h}f(\tau,v)\Big\{\Big(M_\delta^2(\tau+h)-M_\delta^2(\tau)\Big)(f(\tau+h,v))\Big\}dv\\
&=\frac12\int_0^t d\tau\int_{\mathbb{R}^3}f(\tau,v)(\partial_\tau M_\delta^2(\tau))(f(\tau,v))dv
\end{aligned}\tag{8.4.45}$$

那么由(8.4.43), (8.4.43)和(8.4.45), (8.4.42)可写为

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3} f(t,v)M_\delta^2 f(t,v)dv - \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3} f_0(v)M_\delta^2 f(0,v)dv\\&=\int_0^t d\tau\int_{\mathbb{R}^3} f(\tau,v)(\partial_\tau M_\delta^2)(f(\tau,v))dv + \int_0^t d\tau\int_{\mathbb{R}^3}(Q(f,f),M_\delta^2 f)_{L^2}(\tau,v)dv\end{aligned} \tag{8.4.46}$$

由本章第三节的内容或者类似于定理8.4.3的证明, 可得

$$\|M_\delta f\|^2_{H^{\frac{\nu}{2}}} \leqslant C_f\Big\{(-Q(f,M_\delta f),M_\delta f)_{L^2} + \|M_\delta f\|^2_{L^2}\Big\} \tag{8.4.47}$$

再由引理8.4.5, 可得

$$\|M_\delta f\|^2_{H^{\frac{\nu}{2}}} \leqslant \widetilde{C}_f\Big\{(-Q(f,f),M_\delta^2 f)_{L^2} + \|M_\delta f\|^2_{L^2}\Big\} \tag{8.4.48}$$

既然, 有

$$\partial_t M_\delta(t,\xi) = NM_\delta(t,\xi)log\langle\xi\rangle.$$

那么定义$log\Lambda = \mathcal{F}^{-1}log\langle\xi\rangle\mathcal{F}$和$\Lambda = \mathcal{F}^{-1}\langle\xi\rangle\mathcal{F}$, 我们有

$$\int_0^t d\tau\int_{\mathbb{R}^3} f(\tau,v)(\partial_\tau M_\delta^2(\tau))(f(\tau,v))dv \leqslant 2N\int_0^t \|(log\Lambda)^{\frac{1}{2}}M_\delta f(\tau)\|^2_{L^2}d\tau \tag{8.4.49}$$

这样由(8.4.46), (8.4.48)和(8.4.49), 有

$$\begin{aligned}&\|M_\delta f(t)\|^2_{L^2} + \frac{1}{2C_f}\int_0^t \|\Lambda^{\frac{\nu}{2}}M_\delta f(\tau)\|^2_{L^2}d\tau\\&\leqslant \|M_\delta f(0)\|^2_{L^2} + 2N\int_0^t \|(log\Lambda)^{\frac{1}{2}}M_\delta f(\tau)\|^2_{L^2}d\tau + \int_0^t \|M_\delta f(\tau)\|^2_{L^2}d\tau\end{aligned} \tag{8.4.50}$$

利用$log\langle\xi\rangle \leqslant \langle\xi\rangle$和Gagliardo-Nirenberg 插值不等式, 可得对任意的$\varepsilon > 0$有

$$\begin{aligned}&\|M_\delta f(t)\|^2_{L^2} + \Big(\frac{1}{2C_f} - \varepsilon\Big)\int_0^t \|\Lambda^{\frac{\nu}{2}}M_\delta f(\tau)\|^2_{L^2}d\tau\\&\leqslant \|M_\delta f(0)\|^2_{L^2} + C_{\varepsilon,N}\int_0^t \|M_\delta f(\tau)\|^2_{L^2}d\tau\end{aligned} \tag{8.4.51}$$

取$\varepsilon = \frac{1}{4C_f}$, 那么存在一个依赖于$C_f$, N和T_0但和$\delta \in (0,1)$无关的常数$C_{f,N}$使得如下成立

$$\|M_\delta f(t)\|^2_{L^2} \leqslant \|M_\delta f(0)\|^2_{L^2} + C_{f,N}\int_0^t \|M_\delta f(\tau)\|^2_{L^2}d\tau \tag{8.4.52}$$

利用Gronwall不等式

$$\|M_\delta f(t)\|_{L^2}^2 \leqslant e^{C_{f,N,t}}\|M_\delta(0)f_0)\|_{L^2}^2 \tag{8.4.53}$$

既然, 我们有

$$\|M_\delta f(t)\|_{L^2} = \|(1-\delta\triangle)^{-N_0}f(t)\|_{H^{Nt-4}}$$

和

$$\|M_\delta(0)f_0\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} = \|(1-\delta\triangle)^{-N_0}f_0\|_{H^{-4}(\mathbb{R}^3)} \leqslant \|f_0\|_{H^{-4}(\mathbb{R}^3)} \leqslant C\|f_0\|_{L^1(\mathbb{R}^3)}$$

那么

$$\|(1-\delta\triangle)^{-N_0}f(t)\|_{H^{Nt-4}} \leqslant \tilde{C}e^{C_{f,N,t}}\|f_0\|_{L^1(\mathbb{R}^3)}$$

其中常数$\tilde{C}$ 和$\delta \in (0,1)$无关. 最后对任意的$t>0$和任意大的N, 令$\delta \to 0$, 我们有$f(t) \in H^{+\infty}(\mathbb{R}^3)$.

附录一　本书常用记号

我们在这里罗列一些记号, 大部分对PDE读者是熟知的, 对初学者可能需要查阅.

(1) $\mathbb{R}$ = 实数集; $\mathbb{C}$ = 复数集; $\mathbb{N}$ = 自然数集; $\mathbb{Z}$ = 整数集; $\mathbb{Z}_+ = \mathbb{N} \cup \{0\}$; $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$.

(2) $a \vee b = \max(a, b)$; $a \wedge b = \min(a, b)$.

(3) p' 表示 p 的对偶数, 即 $1/p + 1/p' = 1$, $\forall\, p \in [1, \infty]$.

(4) $C > 1$ 和 $0 < c < 1$ 表示常数, 在不同的地方可能不同, 但它们仅依赖于比如空间维数, 方程中不变的常数等.

(5) $A \lesssim B$ 表示 $A \leqslant CB$; $A \sim B$ 表示 $A \lesssim B$且$B \lesssim A$.

(6) $L^p := L^p(\mathbb{R}^n)$ 表示 Lebesgue 空间,

$$\|f\|_p := \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p dx \right)^{1/p}$$

(7) $\vec{f} = (f_1, ..., f_n)$ 为向量函数,

$$\|\vec{f}\|_p = (\|f_1\|_p^2 + ... + \|f_n\|_p^2)^{1/2},$$

比如, 我们会用到 $\|\nabla u\|_p$.

(8) 对 $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$, $|x| = (|x_1|^2 + ... + |x_n|^2)^{1/2}$, 在等价意义下, 有时我们也可以认为 $|x| = |x_1| + ... + |x_n|$.

(9) $A \subset \mathbb{R}^n$, 我们用 $|A|$ 表示集合 A 的测度.

(10) 设 T 和 S 为两个算子, 我们用 $T \sim S$ 表示 T 可以粗略地看成 S (比如在 S 比较容易理解的情况下).

附录二　本书一些常用结论

§B.1　Gagliardo-Nirenberg 不等式

§B.1.1　整数阶导数情形

Gagliardo-Nirenberg 不等式是偏微分方程研究的基本工具, 它的一些特例首先由Gagliardo [41], Ladyzhenskaya [101], Nirenberg [124] 发现. 一般情况陈述如下:

定理 B.1.1. 假设$1 \leqslant p, p_0, p_1 \leqslant \infty$, $\ell, m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\ell < m$, $\ell/m \leqslant \theta \leqslant 1$,

$$\frac{1}{p} = \frac{\ell}{n} + \frac{1-\theta}{p_0} + \theta\left(\frac{1}{p_1} - \frac{m}{n}\right). \tag{B.1.1}$$

那么, 对所有的$u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$,

$$\sum_{|\alpha|=\ell} \|D^\alpha u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \lesssim \|u\|_{L^{p_0}(\mathbb{R}^n)}^{1-\theta} \sum_{|\alpha|=m} \|D^\alpha u\|_{L^{p_1}(\mathbb{R}^n)}^\theta, \tag{B.1.2}$$

其中如果$m - \ell - n/p_0$ 是整数, 我们进一步需要$\ell/m \leqslant \theta < 1$.

Gagliardo-Nirenberg 不等式的证明基于L^p 空间上的整体导数分析, 证明十分复杂, 见[50].

§B.2　序列凸性 Hölder 不等式

平行于 Triebel-Lizorkin 空间的凸性 Hölder 不等式, 我们在序列空间中有

引理B.2.1. 假设$0 < q \leqslant \infty$, $-\infty < s_1, s_0 < \infty$, $0 < \theta < 1$, $s = (1-\theta)s_0 + \theta s_1$. 我们有

$$\|2^{sj} a_j\|_{\ell^q} \lesssim \|2^{s_0 j} a_j\|_{\ell^\infty}^{1-\theta} \|2^{s_1 j} a_j\|_{\ell^\infty}^\theta. \tag{B.2.1}$$

证明. 不妨假设数列 $\{a_j\} = \{a_j\}_{j \geqslant 0}$, $a_j > 0$, $s_1 < s_0$. 记 $C_i = \sup_{j \geqslant 0} 2^{s_i j} a_j$, $i = 0, 1$. 只需考虑 $C_1 > 0$ 的情形. $C_1 \leqslant C_0$. 选取 j_0 满足

$$\min(C_0/2^{s_0 j},\ C_1/2^{s_1 j}) = \begin{cases} C_0/2^{s_0 j}, & j > j_0, \\ C_1/2^{s_1 j}, & j \leqslant j_0. \end{cases}$$

可以看出 $C_0\sim C_1 2^{(s_0-s_1)j_0}$. 于是,

$$\|2^{s_0j}a_j\|_{\ell^\infty}^{1-\theta}\|2^{s_1j}a_j\|_{\ell^\infty}^{\theta}\sim C_1 2^{(s_0-s_1)j_0(1-\theta)}. \tag{B.2.2}$$

另一方面,

$$a_j\leqslant C_0/2^{s_0j},\ j>j_0;\quad a_j\leqslant C_1/2^{s_1j},\ 0\leqslant j\leqslant j_0.$$

通过简单运算得到

$$\|2^{sj}a_j\|_{\ell^q}\lesssim C_1 2^{(s_0-s_1)j_0(1-\theta)}. \tag{B.2.3}$$

由此得到结论. □

§B.3 齐次Triebel-Lizorkin空间的嵌入定理

由于本书反复用到了齐次Triebel-Lizorkin空间的嵌入定理, Triebel [157] 只是说这一结果可能正确. 这里我们给出证明, 平行于定理1.4.5的证明.

命题B.3.1. 设$1\leqslant p_1<p_2<\infty$, $1\leqslant r,q\leqslant\infty$, $-\infty<s_2<s_1<\infty$ 满足$s_1-n/p_1=s_2-n/p_2$. 则有

$$\dot F^{s_1}_{p_1,q}\subset\dot F^{s_2}_{p_2,r}. \tag{B.3.1}$$

证明. 由$\ell^r\subset\ell^q$, $q\geqslant r$, 我们只需要证明

$$\dot F^{s_1}_{p_1,\infty}\subset\dot F^{s_2}_{p_2,1} \tag{B.3.2}$$

即可. 不妨设$\|f\|_{\dot F^{s_1}_{p_1,\infty}}=1$. 回忆$L^p$ 上的等价范数, 有

$$\|f\|^{p_2}_{\dot F^{s_2}_{p_2,1}}\sim\int_0^\infty t^{p_2-1}\left|\left\{x:\sum_{k\in\mathbb{Z}}2^{ks_2}|(\triangle_k f)(x)|>t\right\}\right|dt, \tag{B.3.3}$$

其中$|\{\cdots\}|$表示集合$\{\cdots\}$的测度. 易见

$$\sum_{k=K+1}^{\infty}2^{ks_2}|\triangle_k f|\lesssim 2^{K(s_2-s_1)}2^{K(s_2-s_1)}\sup_k 2^{ks_1}|\triangle_k f|. \tag{B.3.4}$$

由推论1.4.3,

$$\|\triangle_k f\|_\infty\lesssim 2^{kn/p_1}\|\triangle_k f\|_{p_1}\lesssim 2^{k(n/p_1-s_1)}\|f\|_{F^{s_1}_{p_1,\infty}}, \tag{B.3.5}$$

从而, 对$K\in\mathbb{Z}$,

$$\sum_{k=-\infty}^{K}2^{ks_2}|\triangle_k f|\lesssim\sum_{k=-\infty}^{K}2^{k(s_2-s_1+n/p_1)}\lesssim 2^{Kn/p_2}. \tag{B.3.6}$$

选取$K\in\mathbb{Z}$满足$C2^{Kn/p_2}\sim t/2$, 即有$2^K\sim t^{p_2/n}$. 若$\sum_{k\in\mathbb{Z}}2^{ks_2}|(\triangle_k f)(x)|>t$, 则由(B.3.4), (B.3.6)得

$$C2^{K(s_2-s_1)}\sup_{k\in\mathbb{Z}}2^{ks_1}|\triangle_k f|\geqslant\sum_{k=K+1}^{\infty}2^{ks_2}|\triangle_k f|>t/2. \tag{B.3.7}$$

综合(B.3.3), (B.3.7), 我们得到

$$\begin{aligned}\|f\|_{\dot F^{s_2}_{p_2,1}}^{p_2}&\lesssim\int_0^\infty t^{p_2-1}\left|\left\{x:\sup_k 2^{ks_1}|(\triangle_k f)(x)|>ct^{p_2/p_1}\right\}\right|dt\\&\lesssim\int_0^\infty \tau^{p_1-1}\left|\left\{x:\sup_k 2^{ks_1}|(\triangle_k f)(x)|>\tau\right\}\right|d\tau\\&\lesssim 1.\end{aligned} \tag{B.3.8}$$

这蕴含结论. □

§B.4 本书常用结果

§B.4.1 Riesz-Thorin插值定理

定理 B.4.1. 设$1\leqslant p_i,q_i\leqslant\infty$, $p_0\neq p_1$, $q_0\neq q_1$ 满足

$$T:\ L^{p_i}\to L^{q_i},\quad i=0,1.$$

假设$\theta\in(0,1)$ 满足

$$\frac{1}{p}=\frac{1-\theta}{p_0}+\frac{\theta}{p_1},\quad\frac{1}{q}=\frac{1-\theta}{q_0}+\frac{\theta}{q_1}.$$

则有$T:L^p\to L^q$ 并且

$$\|T\|_{L^p\to L^q}\leqslant\|T\|_{L^{p_0}\to L^{q_0}}^{1-\theta}\|T\|_{L^{p_1}\to L^{q_1}}^{\theta}.$$

§B.4.2 Hardy-Littlewood-Sobolev 不等式

迄今, 我们并没有很多有效的方法处理奇异积分. Hardy-Littlewood-Sobolev 不等式是处理奇异积分的基本工具之一, 见[140].

设$0 < \alpha < n$, 记

$$I_\alpha f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(y)}{|x-y|^{n-\alpha}} dy.$$

命题B.4.2. 设$1 < p, q < \infty$, $0 < \alpha < n$ 满足$1/p = 1/q + \alpha/n$. 则有

$$\|I_\alpha f\|_q \lesssim \|f\|_p. \tag{B.4.1}$$

§B.4.3 Van der Corput 引理

引理B.4.3. 设$\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, $P \in C^2(\mathbb{R})$ 满足对任何$\xi \in \mathrm{supp}\,\varphi$, $|P^{(k)}(\xi)| \geqslant 1$, 进一步假设下面的条件有一个成立:

(i) $k \geqslant 2$;

(ii) $k = 1$ 且$P'(x)$ 为单调函数.

则有估计

$$\left| \int e^{\mathrm{i}\lambda P(\xi)} \varphi(\xi) d\xi \right| \lesssim \lambda^{-1/k} (\|\varphi\|_\infty + \|\varphi'\|_1).$$

§B.4.4 Littlewood–Paley 平方函数定理

Littlewood–Paley 平方函数定理是调和分析早期深刻的结果之一, Triebel 型空间的来源也是受到这一结果的影响.

命题B.4.4. 设$1 < p < \infty$, $s \in \mathbb{R}$. 那么

$$\|u\|_{\dot H^s_p} \sim \|u\|_{\dot F^s_{p,2}}, \quad \|u\|_{H^s_p} \sim \|u\|_{F^s_{p,2}}, \tag{B.4.2}$$

特别有

$$\|u\|_{L^p} \sim \|u\|_{\dot F^0_{p,2}}, \quad \|u\|_{L^p} \sim \|u\|_{F^0_{p,2}}. \tag{B.4.3}$$

Littlewood–Paley 平方函数定理的证明可以在很多著作中找到, 如见[140].

§B.5 模空间上的复插值

我们有下面的结果:

定理 B.5.1. 设 $0 < p, q, p_i, q_i \leqslant \infty$, $s, s_i \in \mathbb{R}$, $i = 0, 1$ 且有

$$s = (1-\theta)s_0 + \theta s_1, \quad \frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}, \quad \frac{1}{q} = \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1}. \tag{B.5.1}$$

则

$$(M^{s_0}_{p_0,q_0}, M^{s_1}_{p_1,q_1})_\theta = M^s_{p,q}.$$

证明可见[177].

§B.6 Christ-Kiselev 引理

Christ-Kiselev 引理最早由Christ-Kiselev [26] 发现, 随后为了应用方便, Molinet-Ribaud [113], Smith-Sogge [139], Wang-Han-Huang [175] 做了推广. 记

$$Tf(t) = \int_{-\infty}^{\infty} K(t,t')f(t')dt', \quad T_{re}f(t) = \int_0^t K(t,t')f(t')dt'. \tag{B.6.1}$$

如果$T:\ Y_1 \to X_1$ 蕴含$T_{re}:\ Y_1 \to X_1$, 那么$T:\ Y_1 \to X_1$ 被称为适定的限制算子.

命题B.6.1. 设T 由(B.6.1) 定义. 有下述结论.

(1) 如果$\wedge^3_{i=1}p_i > (\vee^3_{i=1}q_i) \vee (q_1q_3/q_2)$, 那么$T: L^{q_1}_{x_1}L^{q_2}_{x_2}L^{q_3}_t(\mathbb{R}^3) \to L^{p_1}_{x_1}L^{p_2}_{x_2}L^{p_3}_t(\mathbb{R}^3)$ 为适定的限制算子.

(2) 若$q_1 < \wedge^3_{i=1}p_i$, 那么$T: L^{q_1}_t L^{q_2}_{x_1}L^{q_3}_{x_2}(\mathbb{R}^3) \to L^{p_1}_{x_1}L^{p_2}_{x_2}L^{p_3}_t(\mathbb{R}^3)$ 为适定的限制算子.

(3) 若$p_1 > (\vee^3_{i=1}q_i) \vee (q_1q_3/q_2)$, 则$T:\ L^{q_1}_{x_1}L^{q_2}_{x_2}L^{q_3}_t(\mathbb{R}^3) \to L^{p_1}_t L^{p_2}_{x_1}L^{p_3}_{x_2}(\mathbb{R}^3)$ 为适定的限制算子.

(4) 若$\wedge^3_{i=1}p_i > (\vee^3_{i=1}q_i) \vee (q_1q_3/q_2)$, 则$T: L^{q_1}_{x_1}L^{q_2}_{x_2}L^{q_3}_t(\mathbb{R}^3) \to L^{p_2}_{x_2}L^{p_1}_{x_1}L^{p_3}_t(\mathbb{R}^3)$ 为适定的限制算子.

高维空间有类似结论.

参考文献

[1] M. J. Ablowitz, R. Haberman, Nonlinear evolution equations in two and three dimensions, Phys. Rev. Lett., **35** (1975), 1185–1188.

[2] R. Alexandre, L. Desvillettes, C. Villani and B. Wennberg, *Entropy dissipation and long range interactions,* Arch. Rat. Mech. Anal., **152** (2000) 327–355.

[3] R. Alexandre and M. El Safadi, *Littlewood-Paley theory and regularity issues in Boltzmann homogeneous equations. I. Non-cutoff case and Maxwellian molecules,* Math. Models Methods Appl. Sci. **15** (2005), no. 6, 907–920.

[4] R. Alexandre and M. El Safadi, *Littlewood-Paley theory and regularity issues in Boltzmann homogeneous equations. II. Non cutoff case and non Maxwellian molecules,* Discrete Contin. Dyn. Syst. **24** (2009), 1–11.

[5] H. Bahouri and J. Shatah, Decay estimates for the critical semilinear wave equations, Ann. Inst. H. Poincaré, Anal. Non Linéaire, **15**, 783-789.

[6] M. Beals, Self-spreading and strength of singularities for solutions to semilinear wave equation, Annals of Mathematics, **118** (1983) 187–214.

[7] I. Bejenaru and T. Tao, Sharp well-posedness and ill-posedness results for a quadratic non-linear Schrödinger equation, J. Funct. Anal., **233** (2006) 228–259.

[8] T. B. Benjamin, Internal waves of permanent form in fluids of great depth, The Journal of Fluid Mechanics, **29** (1967) 559–592.

[9] A. Bényi, K.A. Okoudjou, Local well-posedness of nonlinear dispersive equations on modulation spaces, Bull. London Math. Soc., **41** (2009), 549-558.

[10] A. Bényi, K. Gröchenig, K.A. Okoudjou and L.G. Rogers, Unimodular Fourier multiplier for modulation spaces, J. Funct. Anal., (2007)

[11] J. Bergh J and J. Löfström, *Interpolation Spaces,* Springer-Verlag, 1976

[12] J. Bourgain, Global well posedness of defocusing critical nonlinear Schrödinger equation in the radial case, J. Amer. Math. Soc., **12** (1999), 145–171.

[13] J. Bourgain, *Global solutions of nonlinear Schrödinger equation,* Amer. Math. Soc., 1999.

[14] J. Bourgain, Fourier transform restriction phenomena for certain lattice subsets and applications to nonlinear evolution equations. I. Schrödinger equations, Geom. Funct. Anal., **3** (1993) 107–156.

[15] J. Bourgain, Fourier transform restriction phenomena for certain lattice subsets and applications to nonlinear evolution equations. II. The KdV-equation, Geom. Funct. Anal., **3** (1993) 209–262.

[16] J. Bourgain, On the Cauchy problem for the Kadomtsev-Petviashvili equation, Geom. Funct. Anal., **3** (1993) 315–341.

[17] J. Bourgain, Refinements of Strichartz' inequality and applications to 2D-NLS with critical nonlinearity, International Mathematical Research Notices, **253** (1998).

[18] P. Brenner, On space-time means and everywhere defined scattering operators for nonlinear Klein-Gordon equations, Math. Z., **186** (1984), 383-391.

[19] P. Brenner, On scattering and everywhere-defined scattering operators of nonlonear Klein-Gordon equations, J. Diff. Eqns., **56** (1985), 310-344.

[20] H. Brezis and P. Mironescu, Gagliardo-Nirenberg, composition and products in fractional Sobolev spaces, J. Evol. Equ. **1** (2001) 387-404.

[21] L. Carleson, *Some analytical problems related to statistical mechanics*, Euclidean Harmonic Analysis, Lecture Notes in Math. vol. 779, Springer, Berlin, 1980, pp. 5-45.

[22] T. Cazenave and F.B. Weissler, The Cauchy problem for the critical nonlinear Schrödinger equation in H^s, Nonlinear Anal. TMA, **14** (1990), 807-836.

[23] C. Cercignani, *The Boltzmann Equation and Its Applications,* Springer-Verlag, 1988.

[24] J. Y. Chemin, Théorèmes d'unicité pour le système de Navier – Stokes tridimensionnel, Journal d'Analyse Mathématique 77 (1999) 27 – 50.

[25] M. Christ, J. Colliander and T. Tao, Asymptotics, frequency modulation and low regularity ill-posedness for canonical defocusing equations, Amer. J. Math., **125** (2003) 1235–1293.

[26] M.Christ, A.Kiselev, Maximal functions associated to filtrations, J. Funct. Anal., **179** (2001), 406-425.

[27] P. A. Clarkson and J. A. Tuszyriski, Exact solutions of the multidimensional derivative nonlinear Schrödinger equation for many-body systems near criticality, J. Phys. A: Math. Gen. **23** (1990), 4269-4288.

[28] J. E. Colliander, J.-M. Delort, C. E. Kenig and G. Staffilani, Bilinear estimates and applications to 2D NLS, Trans. Amer. Math. Soc., **353** (2001) 3307–3325 (electronic).

[29] J. Colliander, M. Keel, G. Staffilani, H. Takaoka and T. Tao, Resonant decompositions and the I-method for cubic nonlinear Schrödinger equation on R^2, arXiv:0704.2730.

[30] J. Colliander, M. Keel, G. Staffilani, H. Takaoka and T. Tao, Sharp global well-posedness for KdV and modified KdV on $\mathbb{R}$ and $\mathbb{T}$, J. Amer. Math. Soc., **16** (2003) 705–749.

[31] J. Colliander, M. Keel, G. Staffilani, H. Takaoka, and T. Tao, Global well-posedness and scattering for the energy-critical nonlinear Schrödinger equation in $\mathbb{R}^3$, *Annals Math.*, **167**(3) (2008), 767–865.

[32] E. Cordero, F. Nicola, Remarks on Fourier multipliers and applications to the wave equation, J. Math. Anal. Appl., **353** (2009), 583–591.

[33] L. Desvillettes, *About the regularization properties of the non cut-off Kac equation,* Comm. Math. Phys. **168** (1995) 417–440.

[34] L. Desvillettes, *Regularization properties of the 2-dimensional non radially symmetric non cutoff spatially homogeneous Boltzmann equation for Maxwellian molecules,* Trans. Theory Stat. Phys. **26–3** (1997) 341–357.

[35] L. Desvillettes, *About the use of the Fourier transform for the Boltzmann equation,* Summer School on Methods and Models of Kinetic Theory (MMKT 2002). Riv. Mat. Univ. Parma, (7) (2003), 1–99.

[36] L. Desvillettes and B. Wennberg, *Smoothness of the solution of the spatially homogeneous Boltzmann equation without cutoff,* Comm. P.D.E **29** (2004) 133–155.

[37] Wei-Yue Ding, You-De Wang, Schrödinger flow of maps into symplectic manifolds, Science in China Ser. A **41** (1998), 746-755.

[38] J. M. Dixon and J. A. Tuszynski, Coherent structures in strongly interacting many-body systems: II. Classical solutions and quantum fluctuations, J. Phys. A: Math. Gen. **22** (1989), 4895-4920.

[39] B. Dodson, Global well-posedness and scattering for the defocusing, L^2-critical, nonlinear Schrödinger equation when $d \geqslant 3$, preprint, arXiv:0912.2467.

[40] H. G. Feichtinger, Modulation spaces on locally compact Abelian group, Technical Report, University of Vienna, 1983. Published in: "Proc. Internat. Conf. on Wavelet and Applications", 99–140. New Delhi Allied Publishers, India, 2003. http://www.unive.ac.at/nuhag-php/bibtex/ open_files/fe03-1_modspa03.pdf.

[41] E. Gagliardo, Proprieta di alcune classi di funzioni in pia variabili, Richerche Mat., **7** (1958), 102–137; **9** (1959), 24–51.

[42] Y. Giga Solutions for semilinear parabolic equations in L^p and regularity of weak solutions of the Navier–Stokes system, Journal of Differential Equations **61** (1986), 186–212.

[43] J. Ginibre and G. Velo, Time decay of finite energy solutions of the nonlinear Klein-Gordon and Schrödinger equations, Ann. Inst. H. Poincare. Phys. Theor., **43** (1985), 399-442.

[44] J. Ginibre and G. Velo, On a class of nonlinear Schrödinger equations II. Scattering theory J. Funct. Anal., **32** (1979), 33–71.

[45] J. Ginibre and G. Velo, Generalized Strichartz inequalities for the wave equation, J. Funct. Anal., **133** (1995), 50-68.

[46] L. Grafakos, *Classical and modern Fourier analysis,* Pearson/Prentice Hall, 2004.

[47] M. Grillakis, On nonlinear Schrödinger equations, *Comm. Partial Diff. Eqns.*, **25** (2000), 1827–1844.

[48] P. Gröbner, Banachräume Glatter Funktionen und Zerlegungsmethoden, Doctoral thesis, University of Vienna, 1992.

[49] K. Gröchenig, Foundations of Time-Frequency Analysis, Birkhäuser, Boston, MA, 2001.

[50] B. L. Guo (郭柏灵), 粘性消去法和插分格式的粘性, 科学出版社, 2004.

[51] B. L. Guo and B. X. Wang, The Cauchy problem for the Davey-Stewartson systems, Comm.on Pure Appl.Math., **52** (1999), 1477–1490.

[52] Z. Guo, Local well-posedness and a priori bounds for the modified Benjamin-Ono equation without using a gauge transformation, arXiv:0807.3764.

[53] Z. Guo, Local Well-posedness for dispersion generalized Benjamin-Ono equations in Sobolev spaces, arXiv:0812.1825.

[54] Z. Guo, 一类非线性项含有导数的色散波方程的Cauchy问题, 北京大学博士论文, (2009).

[55] Z. Guo, Global Well-posedness of Korteweg-de Vries equation in $H^{-3/4}(\mathbb{R})$, J. Math. Pures Appl., **91** (2009) 583–597.

[56] Z. Guo, L. Peng and B. Wang, On the local regularity of the KP-I equation in anisotropic Sobolev space, arXiv:0905.0039.

[57] Z. Guo and B. Wang, Global well posedness and inviscid limit for the Korteweg-de Vries-Burgers equation, J. Differential Equations, **246** (2009) 3864–3901.

[58] Z. H. Guo, L. Z. Peng, B. X. Wang, Decay estimates for a class of wave equations, J. Funct. Anal., **254** (2008), 1642–1660.

[59] M. Hadac, Well-posedness for the Kadomtsev-Petviashvili-II equation and generalisations, Trans. Amer. Math. Soc., **360** (2008) 6555–6572.

[60] M. Hadac, S. Herr and H. Koch, Well-posedness and scattering for the KP-II equation in a critical space, Annales de l'Institut Henri Poincare (C) Non Linear Analysis, **26** (2009) 917–941.

[61] N. Hayashi and T. Ozawa, Finite energy solutions of nonlinear Schrödinger equations of derivative type, SIAM J. Math. Anal., **25** (1994) 1488–1503.

[62] S. Herr, A. Ionescu, C. Kenig and H. Koch, A para-differential renormalization technique for nonlinear dispersive equations, arXiv:0907.4649.

[63] Z. Huo and Y. Jia, *The Cauchy problem for the fourth-order nonlinear Schrödinger equation related to the vortex filament,* J. Diff. Eq., **214**(2005), 1-35.

[64] Z. Huo and Y. Jia, *A refined well-posedness for the fourth-order nonlinear Schrödinger equation related to the vortex filament,* Comm. Partial Differential Equations **32** (2007), no. 10-12, 1493–1510.

[65] Z. Huo, Y. Morimoto, S. Ukai and T. Yang, *Regularity of solutions for spatially homogeneous Boltzmann equation without angular cutoff,* Kinet. Relat. Models **1** (2008), 453–489.

[66] A. D. Ionescu and C. E. Kenig, Global well-posedness of the Benjamin-Ono equation in low-regularity spaces, J. Amer. Math. Soc., **20** (2007) 753–798 (electronic).

[67] A. D. Ionescu, C. E. Kenig and D. Tataru, Global well-posedness of the KP-I initial-value problem in the energy space, Invent. Math., **173** (2008) 265–304.

[68] A. Ionescu and C. E. Kenig, Low-regularity Schrödinger maps, II: Global well posedness in dimensions $d \geqslant 3$, Commun. Math. Physics, **271** (2007), 523–559.

[69] F. John, *Plane waves and spherical means, Applied to partial differential equations,* Springer, 1981.

[70] L.V. Kapitanskii, Weak and yet weak solutions of semilinear wave equations, Comm. Partial Diff. Equations, **19** (1994), 1629–1676.

[71] T. Kato, Strong L^p solutions of the Navier-Stokes equations in $\mathbb{R}^m$ with applications to weak solutions, Math. Z. **187** (1984), 471–480.

[72] T. Kato, On nonlinear Schrödinger equations, Ann.Inst.H.Poincare Phys. Theor. **46** (1987), 113-129.

[73] M. Keel and T. Tao, End point Strichartz estimates, Amer. J. of Math., **120** (1998), 955–980.

[74] C. Kenig, On the local and global well-posedness theory for the KP-I equation, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire, **21** (2004) 827–838.

[75] C.E. Kenig, and F. Merle, Global well-posedness, scattering and blow-up for the energy-critical, focusing, non-linear Schrödinger equation in the radial case. Inventiones Mathematicae 166 (2006) 645-675.

[76] C. E. Kenig, G. Ponce and L. Vega, Oscillatory integrals and regularity of dispersive equations, Indiana Univ. Math. J., **40** (1991) 33–69.

[77] C. E. Kenig, G. Ponce and L. Vega, Well-posedness of the initial value problem for the Korteweg-de Vries equation, J. Amer. Math. Soc., **4** (1991) 323–347.

[78] C. E. Kenig, G. Ponce, L. Vega, Small solutions to nonlinear Schrodinger equation, Ann. Inst. Henri Poincaré, Sect C, **10** (1993), 255-288.

[79] C. E. Kenig, G. Ponce and L. Vega, *The Cauchy problem for the Korteweg-de Vries equation in Sobolev spaces of negative indices,* Duke Math.J., **71** (1993), 1-21.

[80] C.E. Kenig, G. Ponce and L. Vega, Well-posedness and scattering results for generalized KdV equation via contraction principles, Comm. on Pure Appl. Math., **46** (1993), 527–620.

[81] C. E. Kenig, G. Ponce and L. Vega, A bilinear estimate with applications to the KdV equation, J. Amer. Math. Soc., **9** (1996) 573–603.

[82] C. E. Kenig, G. Ponce and L. Vega, Quadratic forms for the 1-D semilinear Schrödinger equation, Trans. Amer. Math. Soc., **346** (1996) 3323–3353.

[83] C. E. Kenig, G. Ponce and L. Vega, Smoothing effects and local existence theory for the generalized nonlinear Schrödinger equations, Invent. Math., **134** (1998), 489–545.

[84] C. E. Kenig, G. Ponce and L. Vega, On the ill-posedness of some canonical dispersive equations, Duke Math. J., **106** (2001) 617–633.

[85] C. E. Kenig, G. Ponce, L. Vega, The Cauchy problem for quasi-linear Schrodinger equations, Invent. Math. **158** (2004), 343–388.

[86] C. E. Kenig, G. Ponce, C. Rolvent, L. Vega, The genreal quasilinear untrahyperbolic Schrodinger equation, Advances in Mathematics **206** (2006), 402–433.

[87] C. E. Kenig and H. Takaoka, Global wellposedness of the modified Benjamin-Ono equation with initial data in $H^{1/2}$, Int. Math. Res. Not., (2006) Art. ID 95702, 44.

[88] R. Killip, D.Li, M. Visan and X. Zhang, Characterization of minimal-mass blowup solutions to the focusing mass-critical NLS, preprint, arXiv:0804.1124.

[89] R. Killip, T. Tao, and M. Visan. The cubic nonlinear Schrödinger equation in two dimensions with radial data, J. Euro. Math. Soc., to appear.

[90] R. Killip, M. Visan, The focusing energy-critical nonlinear Schrödinger equation in dimensions five and higher, preprint, arXiv:0804.1018.

[91] R. Killip, M. Visan, and X. Zhang. The mass-critical nonlinear Schrödinger equation with radial data in dimensions three and higher, Anal. PDE, 1(2):229–266, 2008.

[92] S. Klainerman, Long-time behavior of solutions to nonlinear evolution equations, Arch. Rational Mech. Anal., **78** (1982), 73–98.

[93] S. Klainerman, G. Ponce, Global small amplitude solutions to nonlinear evolution equations, Commun. Pure Appl. Math., **36** (1983), 133–141.

[94] S. Klainerman and M. Machedon, Space-time estimates for null forms and the local existence theorem, Comm. Pure Appl. Math. 46 (1993), no. 9, 1221 – 1268.

[95] S. Klainerman and M. Machedon, Smoothing estimates for null forms and applications, Duke Math. J., **81** (1995) 99–133.

[96] N. Kishimoto, Well-posedness of the Cauchy problem for the Korteweg-de Vries equation at the critical regularity, Preprint.

[97] N. Kishimoto, *Low-regularity Local Well-posedness for Quadratic Nonlinear Schrödinger Equations*, Master Thesis, Kyoto University, 2008.

[98] M. Kobayashi, Modulation spaces $M^{p,q}$ for $0 < p, q \leqslant \infty$, J. of Funct. Spaces and Appl. **4** (2006) no.3, 329–341.

[99] M. Kobayashi, Dual of modulation spaces, J. of Funct. Spaces and Appl. **4** (2006) no.4, 329–341.

[100] B. G. Konopelchenko, B. T. Matkarimov, On the inverse scattering transform of the Ishimori equations, Phys. Lett., **135** (1989), 183–189.

[101] O. Ladyzhenskaya, The solvability "in the large" of the boundary value problem foe the Navier-Stokes equation in the case of two space variables, Comm. Pure Appl. Math., **12** (1959), 427–433.

[102] O. Ladyzhenskaya, *The Mathematical Theory of Viscous Incompressible Flow,* Second English edition, Mathematics and its Applications, Vol. 2, Gordon and Breach, Science Publishers, New York-London-Paris, 1969.

[103] S.P. Levandosky, Decay estimates for fourth order wave equations, J. Diff. Eqns., **143** (1998), 360–413.

[104] F. Linares and G. Ponce, On the Davey-Stewartson systems, Ann. Inst. H. Poincaré, Anal. NonLinéaire **10** (1993), 523–548.

[105] H. Lindblad and C.D. Sogge, On existence and scattering with minimal regularity for semilinear wave equations, J.of Funct. Anal., **130** (1995), 357-426.

[106] J. L. Lions, 非线性边值问题的一些解法, 郭柏灵, 汪礼礽译, 中山大学出版社, 1992.

[107] P. L. Lions, *Regularity and compactness for Boltzmann collision operator without cut-off.* C. R. Acad. Sci. Paris Series I, **326** (1998), 37-41.

[108] W. Littman, Fourier transforms of surface-carried measures and differentiability of surface averages, Bull. of Amer. Math. Soc., **69** (1963), 766–770.

[109] L. Molinet, J.C. Saut and N. Tzvetkov, Ill-posedness issues for the Benjamin-Ono and related equations, SIAM J. Math. Anal. **33** (2001), 982–988.

[110] L. Molinet and F. Ribaud, On the low regularity of the Korteweg-de Vries-Burgers equation, Int. Math. Res. Not., **37** (2002),1979–2005.

[111] L. Molinet, J.-C. Saut and N. Tzvetkov, Global well-posedness for the KP-I equation, Math. Ann., **324** (2002) 255–275, 328(2004), 707–710.

[112] L. Molinet, J.-C. Saut and N. Tzvetkov, Well-posedness and ill-posedness results for the Kadomtsev-Petviashvili-I equation, Duke Mathematical Journal, **115** (2002) 353–384.

[113] L.Molinet, F.Ribaud, Well-posedness results for the generalized Benjamin-Ono equation with small initial data, J.Math.Pures Appl., **83** (2004), 277-311.

[114] C. S. Morawetz and W. A. Strauss, *Decay and scattering of solutions of a nonlinear relativistic wave equation,* Comm. Pure Appl. Math.,**25** (1972), 1–31.

[115] Y. Morimoto, S. Ukai, C.J. Xu and T. Yang, *Regularity of the solution to the spatially homogeneous Boltzmann equation without angular cutoff,* Discrete and Continuous Dynamical Systems, **24** (2009), 187-212.

[116] M. Nakamura and T. Ozawa, Nonlinear Schrödinger equations in the Sobolev space of critical order, J. Funct. Anal., **155** (1998) (2): 364-380

[117] M. Nakamura and T. Ozawa, small data scattering for the nonlinear Klein–Gordon equations, Preprint.

[118] K. Nakanishi, Energy scattering for nonlinear Klein– Gordon and Schrödinger equations in spatial dimensions 1 and 2, J. Funct. Anal., **169** (1999), 201–225.

[119] K. Nakanishi, Unique global existence and asymptotic behavior of solutions for wave equations with non-coercive nonlinearity, Comm. P.D.E., **24** (1999), 185–221.

[120] K. Nakanishi, Scattering theory for nonlinear Klein– Gordon equation with Sobolev critical power, Internat. Math. Res. Notices, **(1999)**, 31–60.

[121] K. Nakanishi, Energy scattering for Hartree equations, *Math. Res. Lett.*, **6** (1999), 107–118.

[122] K. Nakanishi, Remarks on the energy scattering for nonlinear Klein-Gordon and Schrödinger equations. *Tohoku Math. J.*, **53**(2), 285–303, 2001.

[123] K. Nakanishi, H. Takaoka and Y. Tsutsumi, Counterexamples to bilinear estimates related to the KdV equation and the nonlinear Schrödinger equation, Methods of Appl. Anal., **8** (2001) 569–578.

[124] L. Nirenberg, On elliptic partial differential equations, Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa, Ser. III, **13**, (1959), 115–162.

[125] F. Oru, Rôle des oscillations dans quelques probl‘emes d'nalyse non-linéaire, Doctorat de Ecole Normale Supérieure de Cachan, 1998.

[126] T. Ozawa and J. Zhai, Global existence of small classical solutions to nonlinear Schrödinger equations, Ann. I. H. Poincaré, AN, **25** (2008), 303–311.

[127] H. Ono, Algebraic solitary waves in stratified fluids, Journal of the Physical Society of Japan, **39** (1975) 1082–1091.

[128] T. Ozawa, On the nonlinear Schrödinger equations of derivative type, Indiana Univ. Math. J., **45** (1996) 137–163.

[129] Y. P.Pao, *Boltzmann collision operator with inverse power intermolecular potential,, I, II.* Commun. Pure Appl. Math., 27(1974), 407-428, 559-581.

[130] H. Pecher, L^p-Abschätzungen und klassische Lösungen für nichtlineare Wellengleichungen. I, Math. Z. **150** (1976) 159–183.

[131] H. Pecher, Nonlinear small data scattering for the wave and Klein-Gordon equations, Math.Z., 185 (1984) 261-270.

[132] H. Pecher, Low energy scattering for nonlinear Klein-Gordon equations, J. of Funct. Anal., **63** (1985), 101–122.

[133] J. Peetre, Applications de la théorie des espaces d'interpolation dans l'analyse harmonique, Ricerche Mat., **15** (1966), 1–34.

[134] J. Rauch, Partial Differential Equations, Graduate Texts in Math., Springer-Verlag, 1991.

[135] E. Ryckman, M. Visan, Global well-posedness and scattering for the defocusing energy-critical nonlinear Schrödinger equation in $\mathbb{R}^{1+4}$, Amer. J. Math., **129** (2007), 1-60.

[136] I.E. Segal, Dispersion for nonlinear relativistic equation II, Ann. Sc. Ec. Norm Sci., **4** (1968), 459-497.

[137] I.E. Segal, Space-time decay for solutions of wave equations, Advances in Math., **22** (1976), 304–311.

[138] J. Shatah, Global existence of small classical solutions to nonlinear evolution equations, J. Differential Equations, **46** (1982), 409–423.

[139] H. F. Smith, C. D. Sogge, Global Strichartz estimates for nontrapping perturbations of Laplacian Comm.Partial Differential Equations **25** (2000), 2171-2183.

[140] E. M. Stein, *Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions*, Princeton Univ. Press, Princeton, New Jersey, 1970.

[141] E. M. Stein, *Harmonic Analysis,* Princeton Univ. Press, Princeton, New Jersey, 1992.

[142] R. S. Strichartz, Restriction of Fourier transform to quadratic surfaces and decay of solutions of wave equations, Duke Math. J., **44** (1977), 705–714.

[143] W. Strauss, Nonlinear scattering theory at low energy, J. of Funct. Anal., **42** (1981), 110–133 and **43** (1981), 281–293.

[144] W. Strauss, *Nonlinear Wave Equations,* Lecture Notes, Vol. 73 AMS, Providence, RI. 1989.

[145] M. Sugimoto amd N. Tomita, The dilation property of modulation spaces and their inclusion relation with Besov spaces, J. Funct. Anal., **248** (2007), 79–106.

[146] C. Sulem and P.L. Sulem, *The Nonlinear Schrödinger Equation: Self-Focusing and Wave Collaps*, Appl. Math. Sci., **139** Springer-Verlag, 1999.

[147] H. Takaoka, Well-posedness for the one-dimensional nonlinear Schrödinger equation with the derivative nonlinearity, Advances in Differential Equations, **4** (1999) 561–580.

[148] H. Takaoka, Well-posedness for the Kadomtsev-Petviashvili-II equation, Advances in Differential Equations, **5** (2000) 1421–1443.

[149] H. Takaoka and N. Tzvetkov, On the local regularity of the Kadomtsev-Petviashvili-II equation, Int. Math. Res. Not., **2001** (2001) 77–114.

[150] T. Tao, Spherically averaged endpoint Strichartz estimates for the two-dimensional Schrödinger equation, Commun. PDE, **25** (2000), 1471–1485.

[151] T. Tao, Multilinear weighted convolution of L^2-functions, and applications to nonlinear dispersive equations, Amer. J. Math., **123** (2001) 839–908.

[152] T. Tao, Global well-posedness and scattering for the higher-dimensional energy-critical non-linear Schrödinger equation for radial data, *New York Journal of Math.*, **11** (2005), 57–80.

[153] T. Tao, *Nonlinear dispersive equations*, volume 106 of *CBMS Regional Conference Series in Mathematics*, Published for the Conference Board of the Mathematical Sciences, Washington, DC, 2006, local and global analysis.

[154] T. Tao, Scattering for the quartic generalised Korteweg-de Vries equation, J. Differential Equations, **232** (2007) 623–651.

[155] T. Tao, M. Visan and X. Y. Zhang, The nonlinear Schrödinger equation with combined power-type nonlinearities, Comm. PDE, **32** (2007), 1281-1343.

[156] D. Tataru, Local and global results for wave maps I, Comm. Partial Differential Equations, **23** (1998) 1781–1793.

[157] H. Triebel, *Theory of Function Spaces,* Birkhäuser-Verlag, 1983.

[158] J. Toft, Continuity properties for modulation spaces, with applications to pseudo-differential calculus, I. J. Funct. Anal., **207** (2004), 399–429.

[159] P. Tomas, A restriction theorem for the Fourier transform, Bull. Amer. Math. Soc., **81** (1975) 477–478.

[160] J. A. Tuszynski and J. M. Dixon, Coherent structures in strongly interacting many-body systems: I. Derivation of dynamics, J. Phys. A: Math. Gen. **22** (1989), 4877-4894.

[161] S. Ukai, *Local solutions in Gevrey classes to the nonlinear Boltzmann equation without cutoff*, Japan J. Appl. Math., **1** (1984), 141–156.

[162] C. Villani, *On a new class of weak solutions to the spatially homogeneous Boltzmann and Landau equations,* Arch. Rational Mech. Anal. **143** (1998), no. 3, 273–307.

[163] C. Villani, *Regularity estimates via entropy dissipation for the spatially homogeneous Boltmann equation.* Rev. Mat. Iberoamericana, 15,2(1999), 335-352.

[164] C. Villani, *A Review of Mathematical Topics in Collisional Kinetic Theory,* Handbook of Fluid Mechanics, eds. S. Friedlander and D. Serre (North-Holland, 2002).

[165] M. Visan, The defocusing energy-critical nonlinear Schrödinger equation in higher dimensions, Duke Math. J., **138** (2007), 281-374.

[166] Baoxiang Wang, The Cauchy problem for the nonlinear Schrödinger equation, nonlinear Klein–Gordon equation and their coupled equations, Doctoral Thesis, Inst. Appl. Phys. and Comput. Math., Dec. 1993, 1–224.

[167] Baoxiang Wang, Bessel (Riesz) potentials on Banach function spaces and their applications I, Theory, Acta Math. Sinica (N.S.), **14** (1998), 327–340.

[168] Baoxiang Wang, On existence and scattering for critical and subcritical nonlinear Klein–Gordon equations in H^s, Nonlinear Analysis, TMA, **31** (1998), 173–187.

[169] Baoxiang Wang , On scattering of solutions for the critical and subcritical nonlinear Klein-Gordon equations, Discrete and Continuous Dynamical Systems, **5** (1999), 753–763.

[170] Baoxiang Wang, The limit behavior of solutions for the complex Ginzburg-Landau equation, Commun.on Pure Appl. Math., **55** (2002), no.4, 481-508.

[171] Baoxiang Wang, The smoothness of scattering operators for the sinh-Gordon and nonlinear Schrödinger equations, Acta Math. Sinica (Engl. Ser.), **18** (2002), 549–564.

[172] Baoxiang Wang, Nonlinear scattering theory for a class of wave equations in H^s, J. Math. Anal. Appl. **296** (2004), 74–96.

[173] Baoxiang Wang, Exponential Besov spaces and their applications to certain evolution equations with dissipation, Commun. on Pure and Appl. Anal., **3** (2004), 883–919.

[174] Baoxiang Wang, Concentration Phenomenon for the L^2 Critical and Super Critical Nonlinear Schrödinger Equation in Energy Spaces, Commun. Contemp. Math., **8** (2006), 309-330.

[175] Baoxiang Wang, L. J. Han, C. Y. Huang, Global well-Posedness and scattering for the derivative nonlinear Schrödinger equation with small rough data, Ann. I. H. Poincaré, AN, **26** (2009), 2253 – 2281.

[176] Baoxiang Wang, Chengchun Hao and H. Hudzik, Energy scattering for the nonlinear Schrödinger equations with exponential growth in lower spatial dimensions, J. Diff. Eqns., 228(1), 311-338, 2006.

[177] Baoxiang Wang and C. Y. Huang, Frequency-uniform decomposition method for the generalized BO, KdV and NLS equations, J. Differential Equations, **239** (2007), 213–250.

[178] Baoxiang Wang and H. Hudzik, The global Cauchy problem for the NLS and NLKG with small rough data, J. Differential Equations, **231** (2007), 36–73.

[179] Baoxiang Wang, Lifeng Zhao, Boling Guo, Isometric decomposition operators, function spaces $E^{\lambda}_{p,q}$ and their applications to nonlinear evolution equations, J. Funct. Anal., **233** (2006), 1–39.

[180] F. B. Weissler Existence and nonexistence of global solutions for a semilinear heat equation, Israel Math. J. **39** (1981), 29–40.

[181] N. Wiener, Tauberian theorems, Ann. of Math., **33** (1932), 1–100.

[182] K. Yosida, *Functional Analysis,* Springer-Verlag, 1981.

[183] V. E. Zakharov, E. A. Kuznetson, Multi-scale expansions in the theory of systems integrable by inverse scattering method, Physica D, **18** (1986), 455–463.

[184] V. E. Zakharov, E. I. Schulman, Degenerated dispersion laws, motion invariant and kinetic equations, Physica D, **1** (1980), 185–250.

[185] Y. Zhou, B. Guo and S. Tan, Existence and uniqueness of smooth solution for system of ferro-magnetic chain. Sci. China Ser. A **34** (1991), 257–266.

索　引